Lösungen zu den Übung zu Binomialverteilungen 2: Berechnung der Länge n

Aufgabe	Lösung
1. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,6. Bestimmen Sie die möglichst kleine Anzahl n der Bernoulli-Experimente! a. $P(X=0) \leq 0{,}2$ b. $P(X=n) \leq 0{,}01$	a. $B_{n;0,6}(0) \leq 0{,}2 \Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^n \leq 0{,}2$ $\Leftrightarrow 0{,}4^n \leq 0{,}2$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}4^n) \leq \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}4) \leq \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n \geq^{*} \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}4)} \approx 1{,}75$ *da ln(0,4) < 0 **n muss mindestens 2 sein.** b. $P_{n;0,6}(X=n) \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \binom{n}{n} \cdot 0{,}6^n \cdot 0{,}4^0 \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow 0{,}6^n \leq 0{,}01$ $\Leftrightarrow \ln(0{,}6^n) \leq \ln(0{,}01)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}6) \leq \ln(0{,}01)$ $\Leftrightarrow n \geq^{*} \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \approx 9{,}01$ *da ln(0,6) < 0 **n muss mindestens 10 sein.**
2. Die 17- bis 25jährigen sind durchschnittlichen 3 Stunden mit ihrem Handy beschäftigt, das sind bei einem Schlafkonsum von 8 Stunden etwa 18,75% ihrer wachen Zeit. a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man tagsüber unter 12 Jugendlichen mindestens 8 findet, die sich gerade mit ihrem Handy beschäftigen? b. Wie viele junge Erwachsene muss man mindestens untersuchen, um mit einer 90%igen Wahrscheinlichkeit mindestens einen zu finden, der sein Handy ausgeschaltet hat? c. Wie viele junge Erwachsene muss man mindestens untersuchen, um mit einer 90%igen Wahrscheinlichkeit mindestens drei zu finden, die ihr Handy eingeschaltet haben?	a. $B_{12;0,1875}(8) + B_{12;0,1875}(9) + B_{12;0,1875}(10) + B_{12;0,1875}(11) + B_{12;0,1875}(12)$ $= \binom{12}{8} \cdot 0{,}1875^8 \cdot 0{,}8125^4 + \binom{12}{9} \cdot 0{,}1875^9 \cdot 0{,}8125^3 + \binom{12}{10} \cdot 0{,}1875^{10} \cdot 0{,}8125^2$ $+ \binom{12}{11} \cdot 0{,}1875^{11} \cdot 0{,}8125^1 + \binom{12}{12} \cdot 0{,}1875^{12} \cdot 0{,}8125^0 \approx 0{,}000366^{*}$ *alternativ: binomCdf(12,0.1875,8,12)≈ 0,000366 mit TR **Die Wahrscheinlichkeit mindestens 8 Jugendliche mit Handys anzutreffen liegt bei 0,036%.** b. $1 - B_{n;0,1875}(0) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1875^0 \cdot 0{,}8125^n = 0{,}9$ $\Leftrightarrow 1 - 0{,}8125^n = 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}8125^n = 0{,}1 \Leftrightarrow \ln(0{,}8125^n) = \ln(0{,}1)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}8125) = \ln(0{,}1) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8125)} \Leftrightarrow n = 11{,}089$ **Man muss ungefähr 11 Personen untersuchen.** c. $F_{n;0,1875}(2) = 0{,}1 \Leftrightarrow n \approx 27$ (mit TR, Tabelle oder einfach ausprobieren) **Man muss 27 Jugendliche befragen.**

3. Bei den 12 bis 17jährigen fällt die Raucherquote ständig. Im Jahr 2014 haben 10% dieser Jugendlichen angegeben, zu rauchen. a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man unter 20 Jugendlichen mindestens 18 findet, die nicht rauchen? b. Wie viele junge Erwachsene muss man untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens einen zu finden, der raucht?	a. $B_{20;0,9}(18) + B_{20;0,9}(19) + B_{20;0,9}(20)$ $= \binom{20}{18} \cdot 0{,}9^{18} \cdot 0{,}1^2 + \binom{20}{19} \cdot 0{,}9^{19} \cdot 0{,}1^1 + \binom{20}{20} \cdot 0{,}9^{20} \cdot 0{,}1^0 = 0{,}6769$* **Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 18 Nichtraucher zu finden, liegt bei 67,69%.** *alternativ: binomCdf(20,0.9,18,20)≈ 0,676927 mit TR b. $1-B_{n;0,1}(0) \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 1-\binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \geq 0{,}8$ $\Leftrightarrow 1-0{,}9^n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}2 \Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) \leq \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}9) \leq \ln(0{,}2) \Leftrightarrow n \geq^* \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)} \Leftrightarrow n \geq 15{,}27$ *da ln(0,9) < 0 ist **Man muss mindestens 16 Personen untersuchen.**
4. Bei einem Würfelspiel kommt es vor allen Dingen auf die Anzahl der Sechsen an. a. Wie oft muss man würfeln, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% mindestens eine Sechs würfelt? b. Wie oft muss man würfeln, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% mindestens drei Sechsen würfelt?	a. $1-B_{n;\frac{1}{6}}(0) = 0{,}8 \Leftrightarrow 1-\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}8$ $\Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}8 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0{,}2 \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) = \ln(0{,}2) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0{,}2)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \Leftrightarrow n = 8{,}827$ **Man muss ungefähr 9mal würfeln.** b. $B_{n,\frac{1}{6}}(X \geq 3) = 0{,}8 \Leftrightarrow F_{n,\frac{1}{6}}(2) = 0{,}2$ $\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n + \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} 0{,}2$ $\Leftrightarrow n \approx 42$* **Man muss ca. 42mal würfeln.** *mit TR und Tabelle: binomCdf in Tabelle eingeben