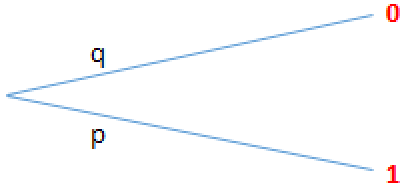
ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNG VON BINOMINALVERTEILTEN ZUFALLSEXPERIMENTEN

www.matheportal.wordpress.com

ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNG BEI EINSTUFIGEN BERNOULLI-VERSUCHEN

Einstufiger Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p:



k	P(X=k)
0	q
1	p

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\sigma = \sqrt{(0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p} \;*$$

$$= \sqrt{p^2 q + q^2 \cdot p}$$

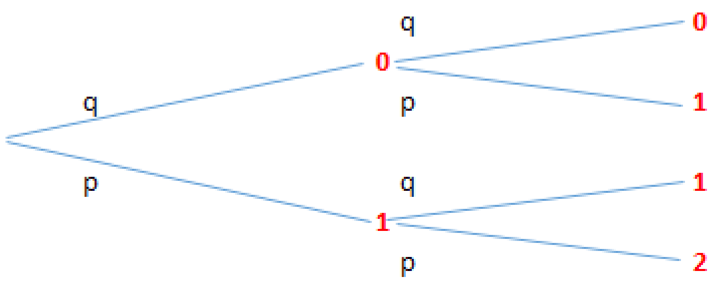
$$= \sqrt{pq \cdot (p+q)}$$

$$= \sqrt{pq \cdot 1} = \sqrt{pq}$$

*p + q =1

ERWARTUNGSWERT UND STANDARDABWEICHUNGEN BEI ZWEISTUFIGEN BERNOULLI-VERSUCHEN

Zweistufiger Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p:



k	P(X=k)
0	q^2
1	$2\cdot p\cdot q$
2	p^2

$$E(X) = 0\cdot q^2 + 1\cdot 2\cdot p\cdot q + 2\cdot p^2$$
$$= 2\cdot p\cdot q + 2\cdot p^2$$
$$= 2\cdot p\cdot (1-p) + 2p^2$$
$$= 2\cdot p - 2p^2 + 2p^2$$
$$= 2\cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{(0-2p)^2\cdot q^2 + (1-2p)^2\cdot 2pq + (2-2p)^2\cdot p^2}$$
$$= \sqrt{4p^2\cdot q^2 + 2pq\cdot (p+q-2p)^2 + 4\cdot(1-p)^2\cdot p^2}$$
$$= \sqrt{2pq\cdot 2pq + 2pq\cdot (q-p)^2 + 4\cdot (q)^2\cdot p^2}$$
$$= \sqrt{2pq\cdot 2pq + 2pq\cdot (q-p)^2 + 2pq\cdot 2pq}$$
$$= \sqrt{2pq\cdot (2pq + (q^2 - 2pq + p^2) + 2pq)}$$
$$= \sqrt{2pq\cdot (q^2 + 2pq + p^2)} = \sqrt{2pq\cdot (q+p)^2} = \sqrt{2pq\cdot 1}$$
$$= \sqrt{2pq}$$

ZUSAMMENFASSUNG

Man sieht, wie kompliziert die Rechnung ist, daher verzichten wir auf den allgemeinen Beweis.
Was haben wir gefunden?

einstufig, also n = 1: E(X) = 1 · p $\sigma = \sqrt{1 \cdot p \cdot q}$

zweistufig, also n = 2: E(X) = 2 · p $\sigma = \sqrt{2 \cdot p \cdot q}$

Allgemein gilt:

Der Erwartungswert eines n-stufigen Bernoulli-Versuchs ist:

E(X) = n · p.

Die Standardabweichung eines n-stufigen Bernoulli-Versuchs ist:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

BEISPIEL

In einer Urne liegen 4 rote und 10 grüne Kugeln. Es wird 7mal gezogen. Die Kugeln werden nach dem Ziehen wieder zurückgelegt.

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Zufallsgröße X: Anzahl der roten Kugeln!

$$E(X) = 7 \cdot \frac{4}{14} = 2$$

Wenn man 7mal zieht, kann man erwarten, dass im Schnitt 2 rote Kugeln gezogen werden.

$$\sigma = \sqrt{7 \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{14}} = \sqrt{\frac{280}{196}} \approx 1{,}2$$

Alle Ergebnisse zwischen 0,8 und 3,2 roten Kugeln liegen innerhalb der Standardabweichung.