Lösungen zu den Steckbriefaufgaben

Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
1. Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die durch die Punkte P(1/5), Q(−2/26) und R(3/21) geht!	$f(x) = ax^2 + bx + c$ P(1/5) einsetzen: $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 5$ Q(−2/26) einsetzen: $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 26$ R(3/21) einsetzen: $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 21$ Man erhält folgendes Gleichungssystem: $\left\lvert \begin{array}{r} a+b+c=5 \\ 4a-2b+c=26 \\ 9a+3b+c=21 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} I \\ (-1)\cdot II \\ (-1)\cdot III \end{array} \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{r} a+b+c=5 \\ -4a+2b-c=-26 \\ -9a-3b-c=-21 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}$ $\Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{r} a+b+c=5 \\ -3a+3b=-21 \\ -8a-2b=-16 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} I \\ I+II \\ I+III \end{array}$ Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten: $\left\lvert \begin{array}{r} -3a+3b=-21 \\ -8a-2b=-16 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{r} -6a+6b=-42 \\ -24a-6b=-48 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} I \\ II \end{array} \Leftrightarrow$ $\left\lvert \begin{array}{r} -6a+6b=-42 \\ -30a=-90 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} I \\ I+II \end{array} \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{r} -6\cdot 3+6b=-42 \\ a=3 \end{array} \right\rvert \begin{array}{c} I \\ I+II \end{array} \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{r} b=-4 \\ a=3 \end{array} \right\rvert$ Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $a+b+c=5$: $3 - 4 + c = 5 \Leftrightarrow c = 6$	$f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

2. Gesucht ist die Funktion dritten Grades, die durch den Ursprung geht, in $P(4/-\frac{80}{3})$ ein Minimum und in x = −2 ein Maximum hat.	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Da sie durch den Ursprung geht, ist d = 0. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$ $P(4/-\frac{80}{3})$ einsetzen: $64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3}$ Minimum bei x = 4: $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 48a + 8b + c = 0$ Maximum bei x = −2: $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b + c = 0$ Man erhält das folgende Gleichungssystem, das man wie oben löst: $\left\| \begin{matrix} 64a + 16b + 4c = -\frac{80}{3} \\ 48a + 8b + c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} I:(-4) \\ (-1)\cdot II \\ III \end{matrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} -16a - 4b - c = \frac{20}{3} \\ -48a - 8b - c = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{matrix} \right\|$ $\Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \\ 12a - 4b + c = 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} I + III \\ II + III \\ III \end{matrix}$ Nun berechnet man das Gleichungssystem mit 2 Unbekannten: $\left\| \begin{matrix} -4a - 8b = \frac{20}{3} \\ -36a - 12b = 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \cdot(-9) \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 36a + 72b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow$ $\left\| \begin{matrix} 60b = -60 \\ -36a - 12b = 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} I + II \\ II \end{matrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} b = -1 \\ -36a - 12\cdot(-1) = 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} I \\ I \text{ in } II \end{matrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} b = -1 \\ a = \frac{1}{3} \end{matrix} \right\|$ Einsetzen in eine der ersten Gleichungen, z. B. in $12a - 4b + c = 0$: $4 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$

3. Welche zum Ursprung punktsymmetrische Funktion dritten Grades hat in $x_0 = 1$ ein Minimum und geht durch den Punkt P(2/4)?	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Da sie durch den Ursprung geht, ist d = 0. Da sie punktsymmetrisch ist, kann sie nur ungerade Exponenten enthalten, also ist b = 0. $f(x) = ax^3 + cx$ P(2/4) einsetzen: $8a + 2c = 4$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ Minimum bei $x_0 = 1$: $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + c = 0$ Man erhält das folgende Gleichungssystem: $\left\vert\begin{matrix} 8a + 2c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} 8a + 2c = 4 \\ c = -3a \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} 8a + 2\cdot(-3a) = 4 \\ c = -3a \end{matrix}\right\vert$ $\Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} 8a + 2\cdot(-3a) = 4 \\ c = -3a \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} a = 2 \\ c = -6 \end{matrix}\right\vert$	$f(x) = 2x^3 - 6x$
4. Gesucht ist eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades, die die y-Achse bei 4 schneidet. Sie hat in P(2/804) einen Wendepunkt!	$f(x) = ax^4+bx^3 + cx^2 +dx +e$ f ist achsensymmetrisch => alle ungeraden Potenzen entfallen, d.h. b = 0 und d = 0 => $f(x) = ax^4+ cx^2 + e$ P(0/4) => e = 4 => $f(x) = ax^4+ cx^2 + 4$ $f(2) = 804 \Leftrightarrow 16a +4c + 4 = 804$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$ $f''(2) = 0 \Leftrightarrow 48a + 2c = 0$ $\left\vert\begin{matrix} 16a + 4c + 4 = 804 \\ 48a + 2c = 0 \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} 16a + 4c = 800 \\ -24a = c \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow$ $\left\vert\begin{matrix} 16a + 4\cdot(-24a) = 800 \\ -24a = c \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} -80a = 800 \\ -24a = c \end{matrix}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{matrix} a = -10 \\ 240 = c \end{matrix}\right\vert$	$f(x) = -10x^4+ 240x^2 + 4$

5. Geben Sie die Gleichung einer quadratischen Funktion an, die die x-Achse bei 3 schneidet und im Punkt P(−1/−32) eine senkrechte Tangente hat!	$f(x) = ax^2 + bx + c$ P(3/0) einsetzen: $9a + 3b + c = 0$ P(−1/−32) einsetzen: $a - b + c = -32$ $f'(x) = 2ax + b$ $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$ $\left\lvert\begin{matrix} 9a + 3b + c = 0 \\ a - b + c = -32 \\ -2a + b = 0 \end{matrix}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix} 9a + 6a + c = 0 \\ a - 2a + c = -32 \\ b = 2a \end{matrix}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix} 15a + c = 0 \\ -a + c = -32 \\ b = 2a \end{matrix}\right\rvert$ $\Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix} 15a + a - 32 = 0 \\ c = a - 32 \\ b = 2a \end{matrix}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix} a = 2 \\ c = 2 - 32 = -30 \\ b = 2 \cdot 2 = 4 \end{matrix}\right\rvert$	$f(x) = 2x^2 + 4x - 30$
6. Welche achsensymmetrische Funktion zweiten Grades, die die y-Achse bei 8 schneidet, schließt mit der x-Achse im Intervall [0;1] eine Fläche von $\frac{22}{3}$ ein?	$f(x) = ax^2 + bx + c$ f ist achsensymmetrisch => alle ungeraden Potenzen entfallen, d.h. $b = 0$ $f(x) = ax^2 + c$ P(0(8) einsetzen: $c = 8$ $f(x) = ax^2 + 8$ $\int_0^2 (ax^2 + 8)dx = \frac{8}{3}$ $\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}ax^3 + 8x\right]_0^1 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a + 8 = \frac{22}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = \frac{-2}{3} \Leftrightarrow a = -2$	$f(x) = -2x^2 + 8$