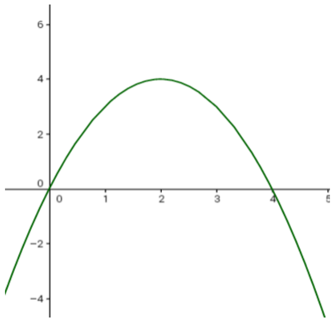
Lösung zum Arbeitsblatt zur Einführung von Textaufgaben zur Integralrechnung

Gegeben ist die Funktion f(x) = $-x^2 + 4x$, $0 \leq x \leq 4$.



Anhand dieser Funktion zeige ich Ihnen die drei Typen von Textaufgaben, die zumeist vorkommen:

1. **Textaufgaben mit Berechnung von Flächen (zwischen f und der x-Achse oder zwischen 2 Graphen):**
   Die Funktion f(x) gibt einen Fußgängertunnel an, x und f(x) in Metern. Berechnen Sie den Querschnitt des Tunnels!
   Lösung:
   Berechnung der Nullstellen: $-x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$
   $A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 - 0 = \frac{32}{3} = 10{,}\overline{6}$
   Der Querschnitt ist $10{,}\overline{6}$ m².

2. **Textaufgaben mit Mittelwert:**
   Die Funktion f(x)gibt die Anzahl der Bakterien an, x in Stunden, f(x) in Hundert Bakterien. Wie viele Bakterien sind in den ersten 4 Stunden durchschnittlich vorhanden?
   Lösung:
   $\overline{m} = \frac{1}{4} \cdot \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}\overline{6}$

   $2{,}\overline{6} \cdot 100 = 266{,}\overline{6}$
   Im Schnitt sind 266 Bakterien vorhanden.

3. **Rekonstruktion von Beständen:**
   Die Funktion f(x) gibt die Wachstumsrate von Bakterien an, x in Stunden, f(x) in Hundert Bakterien. Zu Beginn waren 200 Bakterien vorhanden.
   a. Wie lautet die Funktion g(t), die die vorhandene Anzahl von Bakterien zum Zeitpunkt t angibt?
   b. Wie viele Bakterien existieren nach 4 Stunden?
   Lösung:
   a. Wachstumsrate = Ableitung, d.h. man muss aufleiten:
      $g(t) = 2 + \int_0^t (-x^2 + 4x)dx$ (Nicht 200, da die Bakterien in Hundert angegeben sind.)
   b. $g(4) = 2 + \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = 2 + 10{,}\overline{6} = 12{,}\overline{6}$
      $12{,}\overline{6} \cdot 100 = 1266{,}\overline{6}$
      Nach 4 Stunden sind 1266 Bakterien vorhanden.