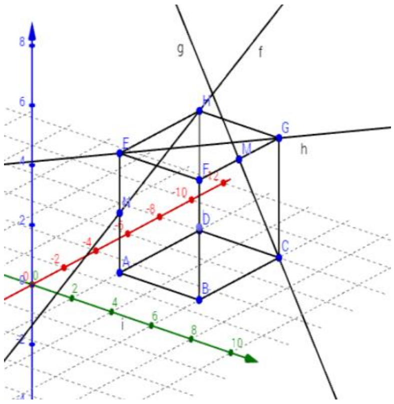
Lösungen zu den Übungen zu Winkeln zwischen Vektoren und Geraden

Aufgabe	Rechnung
1. a. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\2\\9\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $= \frac{2\cdot6+4\cdot2+4\cdot9}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+9^2}} = \frac{65}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{121}} = \frac{65}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{65}{66}) \approx 9{,}99$ Der Winkel beträgt ungefähr $9{,}99^0$.
b. $\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}10\\-10\\5\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{(-4)\cdot10+2\cdot(-10)+(-4)\cdot5}{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{10^2+10^2+5^2}}$ $= \frac{-80}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{225}} = \frac{-80}{90} = -\frac{8}{9}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-\frac{8}{9}) \approx 152{,}73$ Der Winkel beträgt ungefähr $152{,}73^0$.
c. $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-8\\16\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}10\\-6\\\sqrt{8}\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{2\cdot10+(-8)\cdot(-6)+16\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{2^2+(-8)^2+16^2}\cdot\sqrt{10^2+(-6)^2+(\sqrt{8})^2}}$ $= \frac{113{,}255}{\sqrt{324}\cdot\sqrt{144}} = \frac{113{,}255}{216}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{113{,}255}{216}) \approx 58{,}38$ Der Winkel beträgt ungefähr $58{,}38^0$.
2.a. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $\frac{\lvert1\cdot6+0\cdot2+2\cdot2\rvert}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+2^2}}$ $= \frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{44}} \approx 0{,}674$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}674) \approx 47{,}62$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $47{,}62^0$.
b. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\lvert(-3)\cdot2+(-2)\cdot3+(-1)\cdot(-6)\rvert}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}$ $= \frac{\lvert-6\rvert}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{49}} \approx 0{,}23$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}23) \approx 13{,}3$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $13{,}3^0$.
c. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}23\\26\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\-2\end{pmatrix}$	$\cos(\alpha) = \frac{\lvert(-1)\cdot10+3\cdot10+1\cdot(-2)\rvert}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{10^2+10^2+(-2)^2}}$ $= \frac{\lvert18\rvert}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{204}} \approx 0{,}38$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}38) \approx 67{,}67$ Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $67{,}67^0$.

<table>
<tr>
<td>d. g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\-14\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}$</td>
<td>$\cos(\alpha) = \frac{|2\cdot 8+2\cdot 6+(-3)\cdot 2|}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{8^2+6^2+2^2}}$
$= \frac{22}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{104}} \approx 0{,}52$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}52) \approx 58{,}67$
Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von $58{,}67^0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>1. Gegeben ist A(−3/2/0), B(−2/2/0), H(−8/2/4), M und N sind die Mittelpunkte der Strecken. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f, g und h und ihre Schnittwinkel!


</td>
<td>C(−8/2/0), E(−3/2/4), F(−2/2/4), G(−8/2/0)
$\vec{m} = 0{,}5\cdot(\vec{f}+\vec{g}) = \begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix}$ d. h. M(−5/2/2)
$\vec{n} = 0{,}5\cdot(\vec{a}+\vec{e}) = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ d. h. N (−3/2/2)
f : $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$
h : $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}$

<u>Winkel zwischen f und g:</u>
$\cos(\alpha) = \frac{|5\cdot 3+0\cdot 0+(-2)\cdot 2|}{\sqrt{5^2+0^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+2^2}}$
$= \frac{11}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{15}} \approx 0{,}53$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}53) \approx 58$
Die Geraden f und g schneiden sich in einem Winkel von 58^0.
<u>Winkel zwischen f und h:</u>
$\cos(\alpha) = \frac{|5\cdot 5+0\cdot 0+(-2)\cdot 4|}{\sqrt{5^2+0^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{5^2+0^2+4^2}}$
$= \frac{17}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{41}} \approx 0{,}49$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}49) \approx 60{,}66$
Die Geraden f und h schneiden sich in einem Winkel von $60{,}66^0$.
<u>Winkel zwischen g und h:</u>
$\cos(\alpha) = \frac{|3\cdot 5+0\cdot 0+2\cdot 4|}{\sqrt{3^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{5^2+0^2+4^2}}$
$= \frac{23}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{41}} \approx 0{,}93$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}93) \approx 21{,}57$
Die Geraden g und h schneiden sich in einem Winkel von $21{,}57^0$.</td>
</tr>
</table>