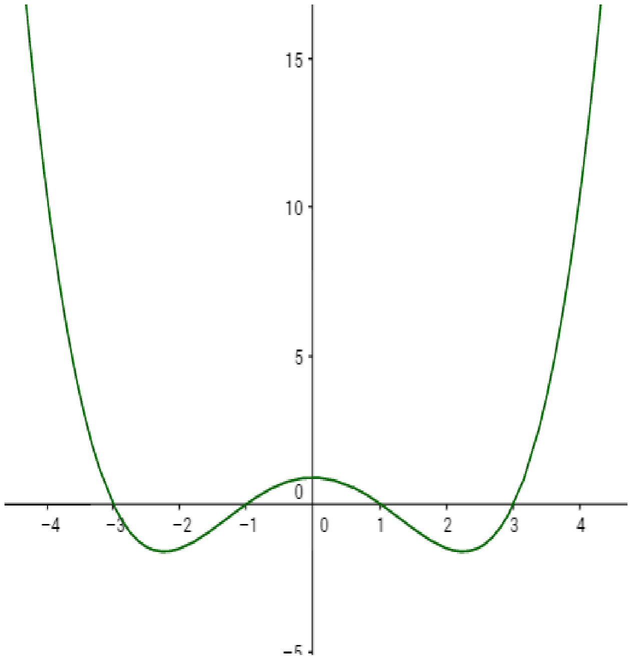
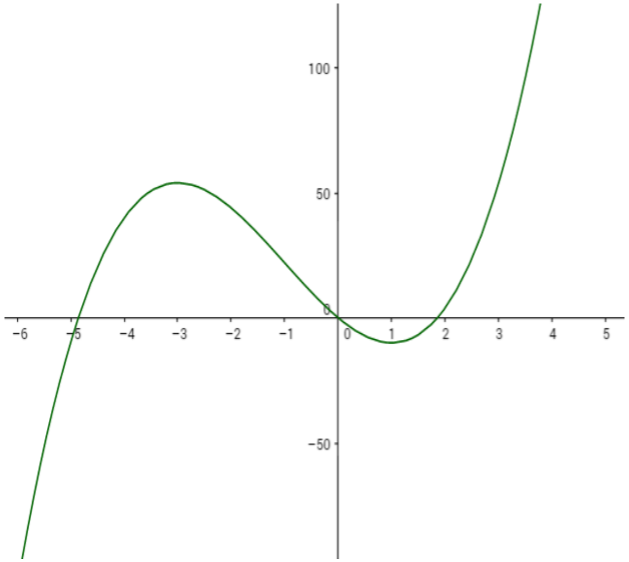
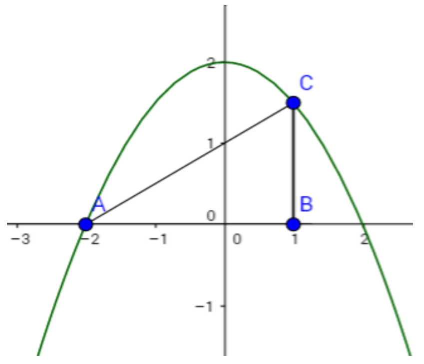
Lösungen zur Übungsklausur zur Differentialrechnung von ganzrationalen Funktionen

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. Berechnen Sie die Nullstellen (ohne TR), Extrema, Wendepunkte und das Krümmungsverhalten der Funktionen! Runden Sie alle Ergebnisse auf 2 Stellen hinter dem Komma! a) $f(x) = 0{,}1x^4 - x^2 + 0{,}9$!	**Nullstellen:** $f(x) = 0{,}1x^4 - x^2 + 0{,}9 = 0$ $\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $\Leftrightarrow z^2 - 10z + 9 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9} = 5 \pm 4$ $\Leftrightarrow z_1 = 9 \vee z_2 = 1$ $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = -1$ **Extrema:** $f'(x) = 0{,}4x^3 - 2x$ $f''(x) = 1{,}2x^2 - 2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}4x^3 - 2x = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}4x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$ $f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\quad f(0) = 0{,}9$ $f''(\sqrt{5}) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\quad f(\sqrt{5}) = -1{,}6$ $f''(-\sqrt{5}) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\quad f(-\sqrt{5}) = -1{,}6$ **Wendepunkte:** $f''(x) = 1{,}2x^2 - 2$ $f'''(x) = 2{,}4x$	Nullstellen: $x = 3 \vee x = -3 \vee x = 1 \vee x = -1$ Maximum $(0/0{,}9)$ Minimum $(\sqrt{5}/-1{,}6)$ Minimum $(-\sqrt{5}/-1{,}6)$

 	$f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow 1{,}2x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{1{,}2} = 1{,}\overline{6}$ $\Leftrightarrow x \approx 1{,}29 \;\; v\; x \approx -1{,}29$ $f'''(1{,}29) = 3{,}096$ $\quad f(1{,}29) \approx -0{,}487$ $f'''(-1{,}29) = -3{,}096$ $\quad f(-1{,}29) \approx -0{,}487$ **Krümmungsverhalten:** $f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 1{,}29 \;\; v\; x \approx -1{,}29$ $x < -1{,}29$: z.B. $x = -2$: $f''(-2) = 2{,}8 > 0$ => linksgekrümmt $x \in [-1{,}29{,}1{,}29]$: z.B. $x = 0$: $f''(0) = -2 > 0$ => rechtsgekrümmt $x > 1{,}29$: z.B. $x = 2$: $f''(2) = 2{,}8 > 0$ => linksgekrümmt	Wendepunkte $W_1\,(1{,}29/ -0{,}487)$ $W_2\,(-1{,}29/ -0{,}487)$ $x < -1{,}29$ linksgekrümmt $x \in [-1{,}29{,}1{,}29]$ rechtsgekrümmt $x > 1{,}29$ linksgekrümmt
1. b) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x$	**Nullstellen:** $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x = 0$ $\Leftrightarrow x \cdot (2x^2 + 6x - 18) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \; v \; x^2 + 3x - 9 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \; v \; x_{1/2} = -1{,}5 \pm\sqrt{1{,}5^2 + 9} = -1{,}5 \pm\sqrt{11{,}25}$ $\Leftrightarrow x = 0 \; v \; x \approx -4{,}85 \; v \; x \approx 1{,}85$ **Extrema:** $f'(x) = 6x^2 + 12x - 18$ $f''(x) = 12x + 12$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x - 18 = 0$	Nullstellen: $x = 0 \; v \; x \approx -4{,}85 \; v \; x \approx 1{,}85$ Maximum $(-3/92)$ Minimum $(1/-10)$

	$\Leftrightarrow$ x = –3 v x = 1 f''(–3) = –24 < 0 => Maximum f(–3) = 92 f''(1) = 24 > 0 => Minimum f(1) = –10 **Wendepunkte:** f''(x) = 12x + 12 f'''(x) = 12 f''(x) = 0 $\Leftrightarrow$ 12x + 12 = 0 $\Leftrightarrow$x = –1 f'''(–1) = 12 f(–1) = 22 **Krümmungsverhalten:** f''(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = –1 x < –1 : z.B. x = –2: f''(–2) = –12 < 0 => rechtsgekrümmt x > –1 : z.B. x = 0: f''(0) = 12 > 0 => linksgekrümmt	Wendepunkt (–1/22) x < –1 rechtsgekrümmt x > –1 linksgekrümmt
2. a) Berechnen Sie die Tangente t des Graphen der Funktion f(x) = 3 x^2 + 6x – 2 im Berührpunkt P(1/7)!	t(x) = mx + b f'(x) = 6x + 6 m = f'(1) = 12 $\Rightarrow$ t(x) = 12x + b P(1/7) einsetzen: 7 = 12 · 1 + b => b = –5 t(x) = 12x – 5	t(x) = 12x – 5
b) In welchem Punkt hat die Tangente an den Graphen von f(x) = $2x^2$ die Steigung 16?	f'(x) = 4x m = 4x = 16 $\Leftrightarrow$ x = 4	Für x = 4 hat die Tangente die Steigung 16.

3. In den nächsten 13 Monaten wird der Absatz von Fahrrädern modelliert durch die Funktion $f(x) = 1{,}5x^3 - 27x^2 + 121{,}5x + 450$, mit $0 \leq x \leq 13$, x in Monaten, f(x) in verkauften Fahrrädern. a. Wie viele Fahrräder werden zu Beginn des 3. Monats verkauft? b. Berechnen Sie, wann die meisten Fahrräder verkauft werden! c. Berechnen Sie den Wendepunkt und interpretieren Sie ihn im Gesamtzusammenhang!	a. $f(3) = 612$ b. $f'(x) = 4{,}5x^2 - 54x + 121{,}5$ $f''(x) = 9x - 54$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4{,}5x^2 - 54x + 121{,}5 = 0$ $\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 9$ $f''(3) = -27 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(3) = 612$ $f''(9) = 27 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f(9) = 450$ Untersuchung der Ränder: $f(0) = 450$, $f(13) = 762 > 612$ **c. Wendepunkte:** $f''(x) = 9x - 54$ $f'''(x) = 9$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9x - 54 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ $f'''(6) = 9 > 0 \Rightarrow$ minimale Steigung $f'(6) = -40{,}5$	Zu Beginn des 3. Monats werden 612 Fahrräder verkauft. Nach 13 Monaten werden die meisten Fahrräder verkauft. Nach 6 Monaten sinkt der Verkauf von Fahrrädern innerhalb des gegebenen Zeitraums am meisten.
4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$. Die Punkte A(–2/0), B(u/0) und C(u/f(u)) mit $0 \leq u \leq 2$ bilden ein Dreieck! Bestimmen Sie u so, dass das Dreieck ABC den größtmöglichen Flächeninhalt hat!	$0 \leq u \leq 2$ Was soll maximal sein? $A = 0{,}5 \cdot a \cdot h$ NB: $a = 2 + u$ und $h = f(u) = -0{,}5u^2 + 2$ Zielfunktion: $A = 0{,}5 \cdot a \cdot h = 0{,}5 \cdot (2 + u) \cdot (-0{,}5u^2 + 2)$ $= (1 + 0{,}5u) \cdot (-0{,}5u^2 + 2)$ $= -0{,}5u^2 + 2 - 0{,}25u^3 + u$ $\Rightarrow A(u) = -0{,}25u^3 - 0{,}5u^2 + u + 2$ $A'(u) = -0{,}75u^2 - u + 1$ $A''(u) = -1{,}5u - 1$	Für $u = 0{,}\overline{6}$ hat das Dreieck den größtmöglichen Flächeninhalt, nämlich 2,37 FE.

	$A'(u) = -0{,}75\,u^2 + u + 1 = 0$ $\Leftrightarrow\ u = -2\ (\notin D(f)) \quad \vee \quad u = 0{,}\overline{6} \approx 0{,}67$ $A''(0{,}67) = -2{,}005 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\qquad A(0{,}67) = 2{,}37$ Ränder: $A(0) = 2 \quad A(2) = 0$	