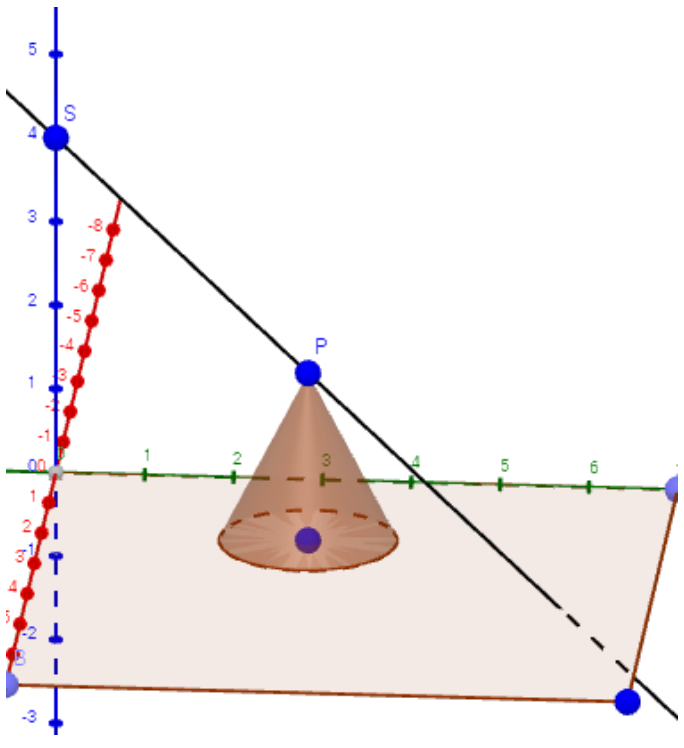
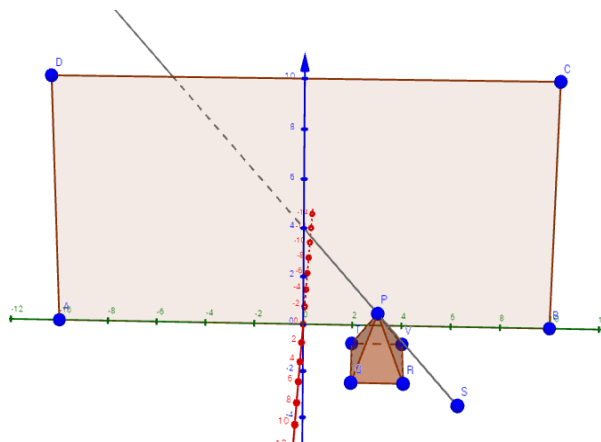


Lösungen zu Textaufgaben zu Ebenen und Geraden

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
<p>1. Eine Lichtquelle sendet vom Standpunkt S (0/0/4) Lichtstrahlen aus. Berechnen Sie die Koordinaten des Schattens des Punktes P(2/3/2)!</p> 	<p> $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ Die Gleichung der Geraden durch S und P lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} *$ </p> <p>Die Gleichung der x_1, x_2-Ebene lautet: $E: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ </p> <p>Man berechnet nun den Durchstoßpunkt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ </p> $\Leftrightarrow \begin{cases} 2r = s \\ 3r = t \\ 4 - 2r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 = s \\ 3 \cdot 2 = t \\ r = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 4 \\ t = 6 \\ r = 2 \end{cases}$ <p>Man setzt r in g ein (oder s und t in E): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ g durchstößt E in D(4/6/0) * Verkürzung: Boden: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 2$; Danach setzt man r in g ein. </p>	<p>Der Schattenpunkt hat die Koordinaten (4/6/0)</p>

2. Eine Lampe sendet vom Punkt $S(8/6/0)$ Lichtstrahlen auf die Spitze der Pyramide aus. Untersuchen Sie, ob der Schattenpunkt des Punktes $P(4/3/2)$ auf eine Leinwand fällt, die entlang der x_2, x_3 -Ebene aufgespannt wird und 10m hoch und 20m breit ist!



$$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Geraden durch S und P lautet:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} *$$

Die Gleichung der Ebene lautet z. B.:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man berechnet nun den Durchstoßpunkt:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4r = 0 \\ 6 + 3r = s \\ -2r = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2 \\ 6 + 3 \cdot (-2) = s \\ -2 \cdot (-2) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2 \\ 0 = s \\ 4 = t \end{cases}$$

Man setzt r in g ein (oder s und t in E):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

g durchstößt E in $D(0/0/4)$, da $4 < 10$ ist, liegt D auf der Leinwand.

*Verkürzung wie oben möglich

Der Schattenpunkt liegt auf der Leinwand, nämlich bei $(0/0/4)$

<p>1. Ein Flugzeug landet am alten Flughafen in Hong Kong. Zur Zeit $t = 0$ ist es im Punkt $P(5000/-3000/600)$. Man simuliert die Flugbahn durch eine Gerade</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}, r > 0$ <p>in Sekunden, alle Angaben in Metern.</p> <p>a. Wann und an welchem Punkt setzt das Flugzeug zuerst auf dem Boden auf, wenn es seine Flugbahn nicht ändern würde?</p> <p>b. 15 Sekunden nach dem Beginn der Flugroutenmessung muss das Flugzeug ein 200 m hohes Hochhaus überfliegen. Berechnen Sie, ob der Pilot seine Flugroute ändern muss!</p>	<p>a. Man berechnet den Durchstoßpunkt der Geraden mit der x_1, x_2-Ebene: Die Gleichung der x_1, x_2-Ebene lautet:</p> $E: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}^*$ $\Leftrightarrow \begin{cases} s = 5000 + 60r \\ t = -3000 + 60r \\ 0 = 600 - 30r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 5000 + 60 \cdot 20 \\ t = -3000 + 60 \cdot 20 \\ 20 = r \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} s = 6200 \\ t = -1800 \\ 20 = r \end{cases}$ <p>Man setzt s und t in E ein (oder r in g):</p> $\vec{x} = 6200 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1800) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6200 \\ -1800 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>b. Man setzt $r = 15$:</p> $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ -2100 \\ 150 \end{pmatrix}$ <p>*Verkürzung wie oben möglich</p>	<p>a. Das Flugzeug landet in 20 Sekunden im Punkt $(6200/-1800/0)$</p> <p>b. Da das Flugzeug eine Höhe von 150 Metern hat, muss es seine Route ändern.</p>
---	---	---

