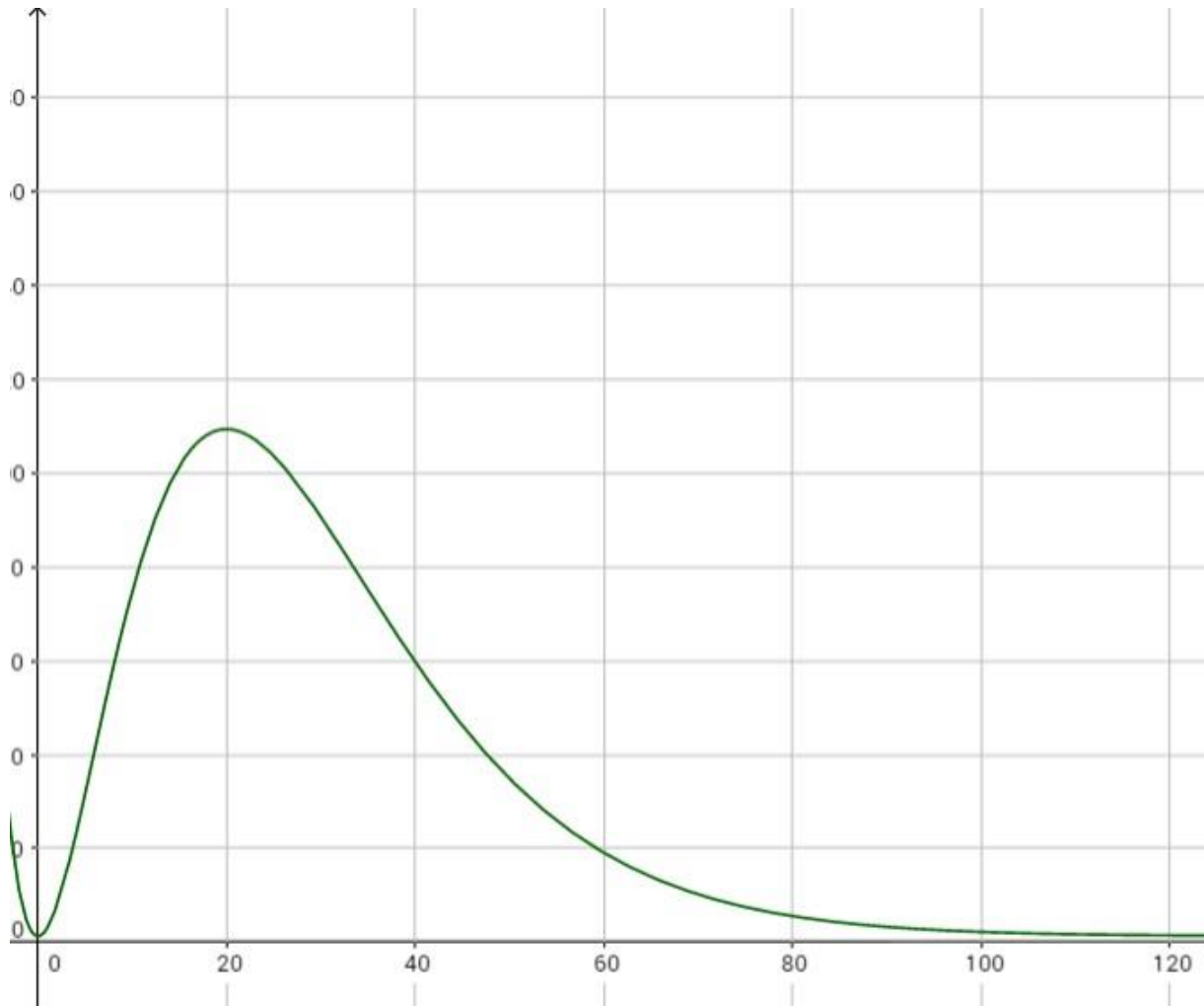


Übungsaufgabe für das mündliche Abitur

Durch die Funktion $f(t) = 1 + 2t^2 \cdot e^{-0,1t}$ wird das Wachsen eines Bakteriums in der ersten Stunde in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten angegeben, $0 \leq t \leq 60$.



- Wie viele Bakterien sind nach 10 Minuten vorhanden?
- Berechnen Sie, wann es die meisten Bakterien gibt!
- Berechnen Sie, wann das Bakterium das geringste Wachstum hat!
- Zeigen Sie, dass $F(t) = (-20t^2 - 400t - 4000) \cdot e^{-0,1t} + t$ eine Stammfunktion von f ist! Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl des Bakteriums in den ersten 50 Minuten!

Sie können $f''(t) = (0,02t^2 - 0,8t + 4) \cdot e^{-0,1t}$ und $f'''(t) = (-0,002t^2 + 0,12t - 1,2) \cdot e^{-0,1t}$ ohne Rechnung verwenden!

Lösung:

a. $f(10) \approx 74,57$

Nach 10 Minuten sind 74 Bakterien vorhanden.

b. $f'(t) = 4t \cdot e^{-0,1t} + 2t^2 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1t} = e^{-0,1t} \cdot (4t - 0,2t^2)$ mit Ketten- und Produktregel

notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} \cdot (4t - 0,2t^2)$$

ein Produkt ist 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} = 0 \vee 4t - 0,2t^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,1t} \neq 0 \vee t = 0 \vee t = 20$$

$$f''(t) = (0,02t^2 - 0,8t + 4) \cdot e^{-0,1t}$$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(t) = 0$ und $f''(x) < 0$:

$$f''(0) = 4$$

$$f''(20) = -0,54 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$f(20) \approx 109,27$$

$$[\text{Ränder: } f(0) = 1 < 109,27, f(60) \approx 18,85 < 109,27]$$

Nach 20 Minuten gibt es die meisten Bakterien!

c. notwendige Bedingung: $f''(t) = 0$

$$\Leftrightarrow (0,02t^2 - 0,8t + 4) \cdot e^{-0,1t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} = 0 \vee 0,02t^2 - 0,8t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} \neq 0 \quad t \approx 5,85 \vee t \approx 34,14$$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(t) = 0$ und $f'''(t) > 0$:

$$f'''(5,85) \approx -0,31 < 0 \Rightarrow \text{maximale Steigung}$$

$$f'''(34,14) \approx 0,01 > 0 \Rightarrow \text{minimale Steigung}$$

$$f'(34,14) \approx -3,18$$

$$[\text{Ränder: } f'(0) = 1 > -3,18, f'(60) \approx 18,85 > -3,18]$$

Nach 34,14 Minuten ist das Wachstum am geringsten.

d. $F(t) = (-20t^2 - 400t - 4000) e^{-0,1t} + t$

zu zeigen: $F'(t) = f(t)$:

$$F'(t) = (-40t - 400) \cdot e^{-0,1t} + (-20t^2 - 400t - 4000) \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) + 1$$

$$= e^{-0,1t} \cdot (-40t - 400 + 2t^2 + 40t + 400) + 1$$

$$= 1 + 2t^2 \cdot e^{-0,1t} = f(t)$$

$$\frac{1}{50} \cdot \int_0^{50} f(t) dt = \frac{1}{50} \cdot [F(t)]_0^{50} = \frac{1}{50} \cdot [F(50) - F(0)]$$

$$= \frac{1}{50} \cdot [-448,60 - (-4000)] \approx 71,02$$

Es sind durchschnittlich ca. 71 Bakterien vorhanden.

