Übung für das mündliche Abitur: Funktionenscharen

Gegeben ist $f_a(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2$; $a > 0$.

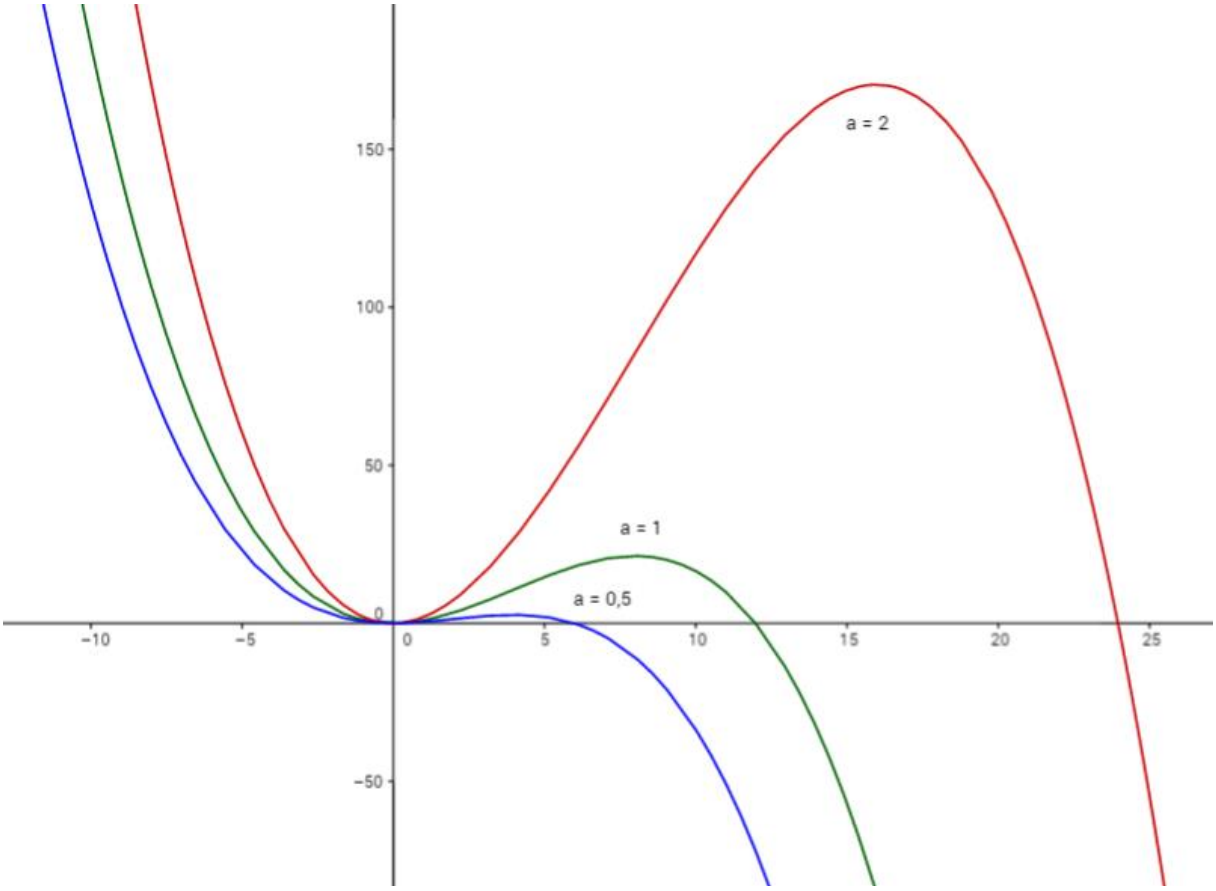
a. Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle x = 4!

b. Berechnen Sie die Nullstellen!

c. Bestimmen Sie die Extrema

d. Bestimmen Sie die Wendepunkte!

e. Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse!



Lösung:

a. $f_a(4) = -\frac{16}{3} + 16a$

b. Nullstellen:

$-\frac{1}{12}x^3 + ax^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 \cdot (-\frac{1}{12}x + a) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; \frac{1}{12}x = a$
$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = 12a$

c. Extrema:

$f_a'(x) = -0{,}25x^2 + 2ax$
$f_a''(x) = -0{,}5x + 2a$
$f_a'''(x) = -0{,}5$

notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$:
$f_a'(x) = -0{,}25x^2 + 2ax = 0$
$\Leftrightarrow x \cdot (-0{,}25x + 2a) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}25x = 2a$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8a$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$:
$f_a''(8a) = -4a + 2a = -2a < 0$, da $a > 0$ => Maximum
$f_a''(0) = 2a > 0$ => Minimum
$f_a(8a) = -\frac{1}{12}(8a)^3 + a\cdot(8a)^2 = -\frac{128}{3}a^3 + 64a^3 = \frac{64}{3}a^3$ $\quad f_a(0) = 0$

HP $(8a/\frac{64}{3}a^3)$ TP (0/0)

d. Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f_a''(x) = 0$:
$f_a''(x) = -0{,}5x + 2a = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x = 2a \Leftrightarrow x = 4a$

notwendige und hinreichende Bedingung: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$:
$f_a'''(4a) = -0{,}5 \neq 0$ => WP (mit maximaler Steigung)
$f_a(4a) = -\frac{1}{12}(4a)^3 + a\cdot(4a)^2 = -\frac{16}{3}a^3 + 16a^3 = \frac{32}{3}a^3$

WP$(4a/\frac{32}{3}a^3)$

e. Fläche:

$\int_0^{12a}(-\frac{1}{12}x^3 + ax^2)dx = \left[-\frac{1}{48}x^4 + \frac{a}{3}x^3\right]_0^{12a} = -432a^4 + 576a^4 - 0 = 144a^4$