Lösungen zu den einfachen Aufgaben zu Funktionenscharen

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Nullstellen! $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$!	Rechnung	Lösung ($a \neq 0$ wird angenommen)
a. $f_a(x) = 4ax + 6$	$4ax + 6 = 0 \Leftrightarrow 4ax = -6 \Leftrightarrow ax = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2a}$	$x = -\frac{3}{2a}$
b. $f_a(x) = -8x + 16a$	$-8x + 16a = 0 \Leftrightarrow 8x = 16a \Leftrightarrow x = 2a$	$x = 2a$
c. $f_a(x) = 5ax + 15a$	$5ax + 15a = 0 \Leftrightarrow 5ax = -15a \Leftrightarrow x = -3$	$x = -3$
d. $f_a(x) = (x-3a) \cdot (x+6a)$	$(x-3a) \cdot (x+6a) = 0 \Leftrightarrow x-3a = 0 \vee x+6a = 0$ $\Leftrightarrow x = 3a \vee x = -6a$	$x = 3a \vee x = -6a$
e. $f_a(x) = x^2 + 2ax + 9$	$x^2 + 2ax + 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{2}\right)^2 - 9}$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 9}$ Untersuchung der Determinanten: $a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 3$	$a = \pm 3$: $x = -a$ $a \in]-3; 3[$: keine Lösung $a > 3$ oder $a < -3$: $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 9}$
f. $f_a(x) = ax^2 + ax + 1$	$ax^2 + ax + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{a} = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{a}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}}$ Untersuchung der Determinanten: $\frac{1}{4} - \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$	$a = 4$: $x = -\frac{1}{2}$ $a > 4$: $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a}}$ $a < 4$: keine Lösung

g. $f_a(x) = x^3 + 2x^2 + ax$	$x^3 + 2x^2 + ax = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 2x + a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 2x + a = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - a}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$	$a = 1$: $x = -1 \vee x = 0$ $a > 1$: $x = 0$ $a < 1$: $x_1 = 0 \vee$ $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-a}$
h. $f_a(x) = x^4 - 8ax^2 + 7a^2$	$x^4 - 8ax^2 + 7a^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 8az + 7a^2 = 0$ (Substitution) $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-8a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8a}{2}\right)^2 - 7a^2}$ $= 4a \pm \sqrt{16a^2 - 7a^2} = 4a \pm \sqrt{9a^2} = 4a \pm 3a$ $\Leftrightarrow z_1 = 7a \vee z_2 = a \Leftrightarrow x^2 = 7a \vee x^2 = a$ (geht nur für $a > 0$!)	$a > 0$: $x = \sqrt{7a} \vee x = -\sqrt{7a}$ $\vee\, x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}$ $a < 0$: keine Lösung
i. $f_a(x) = ax^4 - 25$	$ax^4 - 25 = 0 \Leftrightarrow ax^4 = 25 \Leftrightarrow x^4 = \frac{25}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{25}{a}}$	$a > 0$: $x = \pm\sqrt[4]{\frac{25}{a}}$ $a < 0$: keine Lösung
j. $f_a(x) = x^3 - a^6$	$x^3 - a^6 = 0 \Leftrightarrow x^3 = a^6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^6} = a^2$	$x = a^2$
k. $f_a(x) = ax^7 + 10x^2$	$ax^7 + 10x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (ax^5 + 10) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee ax^5 + 10 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -\frac{10}{a} \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{\frac{10}{a}}$	$x = -\sqrt[5]{\frac{10}{a}}$ oder genauer: $a > 0$: $x = -\sqrt[5]{\frac{10}{a}}$ $a < 0$: $x = \sqrt[5]{\frac{10}{\lvert a\rvert}}$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionenscharen! $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$!	Rechnung	Lösung ($a \neq 0$ wird angenommen)
a. $f(x) = x^3$ und $g_a(x) = -ax$	$x^3 = -ax \Leftrightarrow x^3 + ax = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = -a$ (für a < 0 lösbar) $f(0) = 0$; $f(\sqrt{-a}) = (\sqrt{-a})^3$; $f(-\sqrt{-a}) = -(\sqrt{-a})^3$	$a > 0$: S(0/0) $a < 0$: $S_1(0/0)$, $S_2(\sqrt{-a}/(\sqrt{-a})^3)$, $S_2(-\sqrt{-a}/-(\sqrt{-a})^3)$
b. $f_a(x) = x^3 + ax^2$ und $g_a(x) = -a^2x$	$x^3 + ax^2 = -a^2x \Leftrightarrow x^3 + ax^2 + a^2x = 0$ $\Leftrightarrow x \cdot (x^2 + ax + a^2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + ax + a^2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2}$ (keine Lösung)	S(0/0)
c. $f_a(x) = -2ax - 4x^2$ und $g_a(x) = 2ax^3$	$-2ax - 4x^2 = 2ax^3 \Leftrightarrow 2ax^3 + 4x^2 + 2ax = 0$ $\Leftrightarrow x \cdot (2ax^2 + 4x + 2a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + \frac{2}{a}x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1}$ Untersuchung der Determinanten: $\frac{1}{a^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 = 0$ $\Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1$	$a > 1$ oder $a < -1$: S(0/0) $a = \pm 1$: $x = -\frac{1}{a}$ $a \in \,]-1; 1[$: $S_1(0/0)$, $S_2(-\frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1} / 2a(-\frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1})^3)$, $S_2(-\frac{1}{a} - \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1} / 2a(-\frac{1}{a} - \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1})^3)$