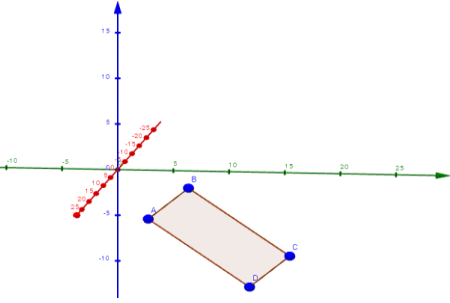


Lösungen zu den Übungen zur Orthogonalität von Vektoren

	Aufgabe	Rechnung	Lösung
1	<p>Untersuche Sie, ob die Vektoren orthogonal zueinander sind!</p> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 0$ $\vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = 32 \neq 0$	<p>\vec{a} und \vec{b} sind orthogonal.</p> <p>\vec{a} und \vec{c} sind orthogonal.</p> <p>\vec{b} und \vec{c} sind nicht orthogonal.</p>
2	<p>Untersuchen Sie, um welches Viereck es sich handelt!</p> <p>A(2/3/-5), B(5/7/-1), C(12/17/-7), D(9/13/-11)</p> 	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ <p>Also gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$!</p> $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = 21 + 40 - 24 = 37,$ <p>d.h. es gibt keinen rechten Winkel.</p>	<p>Das Viereck ist ein Parallelogramm.</p>

3 Geben Sie einen Vektor an, der auf \vec{a}

und \vec{b} senkrecht steht!

$$a. \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b. \vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorprodukt: } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-2) - 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot 6 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Gesucht $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ sodass gilt: $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

$$a. \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 6n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0$$

$$I. 2n_1 - n_2 + 4n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 2n_1 + 4n_3$$

$$II. 6n_1 + 4n_2 - 2n_3 = 0$$

$$\text{Einsetzen von I. in II: } 6n_1 + 4 \cdot (2n_1 + 4n_3) - 2n_3 = 0$$

$$14n_1 + 14n_3 = 0$$

$$n_1 = -n_3$$

$$\text{Einsetzen in I.: } n_2 = 2 \cdot (-n_3) + 4n_3$$

$$n_2 = 2n_3$$

$$b. \text{ Vektorprodukt: } \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-6) \\ (-4) \cdot 8 - 20 \cdot 1 \\ 20 \cdot (-6) - (-2) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -52 \\ -104 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alternativ: } \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 20n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = 8n_1 - 6n_2 + n_3 = 0$$

$$I. 20n_1 - 2n_2 - 4n_3 = 0$$

$$II. 8n_1 - 6n_2 + n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = -8n_1 + 6n_2$$

$$\text{Einsetzen von II. in I: } 20n_1 - 2n_2 - 4 \cdot (-8n_1 + 6n_2) = 0$$

$$52n_1 - 26n_2 = 0$$

$$n_1 = \frac{26}{52} n_2$$

$$n_1 = 0,5 n_2$$

$$\text{Einsetzen in II.: } n_3 = -8 \cdot 0,5 n_2 + 6n_2 = 2n_2$$

$$n_3 = 2n_2$$

$$\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -n_3 \\ 2n_3 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. für } n_3 = 4: \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

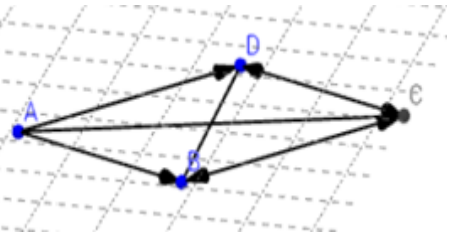
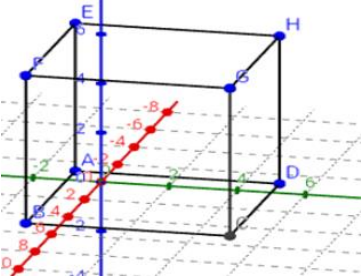
$$\begin{pmatrix} -26 \\ -52 \\ -104 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0,5n_2 \\ n_2 \\ 2n_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. für } n_2 = 2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4	<p>Gegeben sind die Punkte A(2/-1/2), B(-3/-2/2) und C(1/1/3)!</p> <p>a. Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist!</p> <p>b. Untersuchen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Überlegen sie dazu zuerst, wo ein rechter Winkel sein könnte!</p>	<p>a. Zu zeigen: $\vec{AB} = \vec{BC}$ (oder = $\vec{BC} = \vec{AC}$)</p> <p>$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AB} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{26}$</p> <p>$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26}$</p> <p>$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{6}$</p> <p>b. Der rechte Winkel kann nur zwischen den gleichen Seiten liegen:</p> <p>$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-5) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 = -23 \neq 0$</p>	<p>Das Dreieck ist gleichschenkelig.</p> <p>Das Dreieck ist nicht rechtwinklig.</p>
---	---	---	---

<p>5</p>	<p>Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Viereck mit $A(2/3/-5)$, $B(7/9/-4)$, $C(9/16/-1)$ und $D(4/10/-2)$ um eine Raute handelt und berechnen Sie den Flächeninhalt!</p> 	<p>Zu zeigen:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{AD} = \vec{BC}$ $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \neq 0$ (Beweis, dass es kein Quadrat ist) <p>Zu 1: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$</p> <p>Zu 2: $\vec{AB} = \vec{DC} = \sqrt{5^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{62}$ $\vec{AD} = \vec{BC} = \sqrt{2^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{62}$</p> <p>Zu 3: $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 10 + 42 + 3 \neq 0$</p> <p>Flächeninhalt: $A = 0,5 \cdot e \cdot f$ $= 0,5 \cdot \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \left \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right = \sqrt{7^2 + 13^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} \approx 0,5 \cdot 15,3 \cdot 3,74 = 28,61$</p>	<p>Das Viereck ist eine Raute.</p> <p>Der Flächeninhalt der Raute beträgt 28,61 FE.</p>
<p>6</p>	<p>Gegeben ist ein Quader mit $A(-1/1/0)$, $B(5/-1/0)$ und $G(5/5/7)$. Untersuchen Sie, ob die Raumdiagonalen \vec{AG} und \vec{BH} senkrecht aufeinander stehen!</p> 	<p>$H(-1/5/7)$</p> <p>$\vec{AG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{BH} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$</p> <p>$\vec{AG} \cdot \vec{BH} = 6 \cdot (-6) + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 7 = 37 \neq 0$</p>	<p>Die Raumdiagonalen stehen nicht senkrecht aufeinander.</p>