Lösungen zu den Übungen zum Erstellen von Ebenengleichungen in Parameterform

Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. Gegeben sind die Punkte A, B und C! Geben Sie die Parameterform der Ebene an, die durch die drei Punkte festgelegt ist! a. A(3/5/−8), B(−4/7/1), C(0/−6/2) b. A(10/−12/7), B(6/3/14), C(−18/−6/1) c. A(22/−26/8), B(−40/20/−10), C(16/38/−40)	a. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$ b. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -24 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix}$ c. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -62 \\ 46 \\ -18 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 56 \\ 18 \\ -30 \end{pmatrix}$	a. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ Oder: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$ Oder: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$ etc. (Man kann jeden der 3 Vektoren mit jedem der 3 Ortsvektoren kombinieren.) b. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ -9 \\ -13 \end{pmatrix}$ c. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ -26 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -62 \\ 46 \\ -18 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 56 \\ 18 \\ -30 \end{pmatrix}$
2. a. Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die durch die Punkte C, D und H geht! b. Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die das Dreieck G, H und I enthält!	a. C(4/−6/0), D(0/−6/0,) H(6/−6/3) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. F(0/0/3), G(4/0/3), I(0/−3/5) $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	a. z.B. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. z.B. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Ebene E liegt!

a. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

P(28/29/16)

b. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -14 \\ 20 \\ -38 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 46 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$

P(−7/13/−8)

a. $\begin{pmatrix} 28 \\ 29 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} \Big| - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 26 = 7r + 4s \\ 24 = -3r + 10s \\ 24 = -6r + 12s \end{array} \right| \begin{array}{c} \cdot(-3) \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} -78 = -21r - 12s \\ 24 = -3r + 10s \\ 24 = -6r + 12s \end{array} \right| \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} -54 = -27r \\ 24 = -3r + 10s \\ 24 = -6r + 12s \end{array} \right| \begin{array}{c} I + III \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 2 = r \\ 24 = -3 \cdot 2 + 10s \\ 24 = -6 \cdot 2 + 12s \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2 = r \\ 3 = s \\ 3 = s \end{array} \right|$$

b. $\begin{pmatrix} -7 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 20 \\ -38 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 46 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} -14 \\ 20 \\ -38 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 7 = 15r + 8s \\ -7 = -10r - 3s \\ 30 = 46r + 15s \end{array} \right| \begin{array}{c} I \\ \cdot 5 \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 7 = 15r + 8s \\ -35 = -50r - 15s \\ 30 = 46r + 15s \end{array} \right| \begin{array}{c} I \\ \cdot 5 \\ III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 7 = 15r + 8s \\ -5 = -4r \\ 30 = 46r + 15s \end{array} \right| II + III \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 7 = 15 \cdot 1{,}25 + 8s \\ 1{,}25 = r \\ 30 = 46 \cdot 1{,}25 + 15s \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} -1{,}46875 = s \\ 1{,}25 = r \\ -1{,}8\overline{3} = s \end{array} \right|$$

a. P liegt auf E

b. P liegt nicht auf E

4. Untersuchen Sie, ob die Punkte $P_1(-8/3/30)$, $P_2(-18/10/50)$ und $P_3(-3/-0{,}5/20)$ eine Ebene aufspannen!	$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10{,}5 \\ -30 \end{pmatrix} \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3{,}5 \\ -10 \end{pmatrix}$ $(-1{,}5) \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3}$ $3 \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_2P_3}$, d.h. die Vektoren sind linear abhängig	Die drei Punkte liegen auf einer Geraden und spannen keine Ebene auf.
5. Geben Sie die Gleichung der speziellen Ebenen an! a. die x_1,x_2-Ebene b. die x_2,x_3-Ebene c. die x_1,x_3-Ebene d. die Ebene, die parallel zur die x_1,x_2-Ebene liegt und die x_3-Achse bei 3 schneidet e. die Ebene, die parallel zur die x_2,x_3-Ebene liegt und durch den Punkt $P(-2/0/0)$ geht	Es gibt beliebig viele Ebenengleichungen. Bei der x_1,x_2-Ebene müssen die x_3-Koordinaten Null sein. Bei den anderen Ebenen entsprechend.	a. z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b. z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d. z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e. z.B. $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$