Lösungen zur Länge eines Vektors

1. Berechnen Sie die Länge der folgenden Vektoren!

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$
$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$
$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}24$

2. Berechnen Sie den Einheitsvektor (EV) und einen Vektor der gleichen Richtung, der die Länge 4 hat (V_4)!

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ EV: $\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ V_4: $\frac{4}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{78}$ EV: $\frac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ V_4: $\frac{4}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{50}$ EV: $\frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ V_4: $\frac{4}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. a. Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A (2/−3/5) und B(1/−5/6)!
b. Geben Sie zwei Zahl für b_2 an, sodass A (2/−3/5) und B(1/b_2/6) den Abstand 5 haben!

$a.\ |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$b.\ |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ b_2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (b_2 + 3)^2 + 1^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = 5$
$\Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + (b_2 + 3)^2 + 1^2} = 5$
$\Leftrightarrow 1 + (b_2 + 3)^2 + 1 = 25$
$\Leftrightarrow (b_2 + 3)^2 = 23$
$\Leftrightarrow b_2 + 3 = \sqrt{23} \vee b_2 + 3 = -\sqrt{23}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{b_2 = -3 + \sqrt{23} \vee b_2 = -3 - \sqrt{23}}$

(Man kann auch mit binomischer und p,q-Formel rechnen: $b_2 + 6b_2 + 9 = 23$
$\Leftrightarrow b_2 + 6b_2 - 14 = 0$ ....)

4. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC mit A(1/2/4), B(10/7/8) und C(6/12/17) gleichseitig oder gleichschenklig ist!

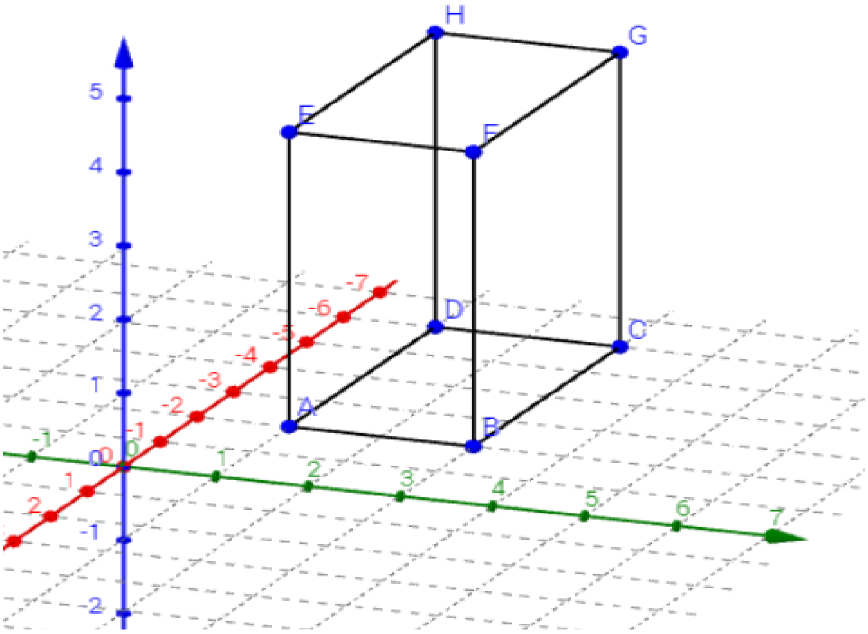
$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}10\\7\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right| = = \left|\begin{pmatrix}9\\5\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9^2+5^2+4^2} = \sqrt{122}$

$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}10\\7\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\12\\17\end{pmatrix}\right| = = \left|\begin{pmatrix}4\\-5\\-9\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+(-5)^2+(-9)^2} = \sqrt{122}$

$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}6\\12\\17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right| = = \left|\begin{pmatrix}5\\10\\13\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+10^2+13^2} = \sqrt{294}$

Das Dreieck ist gleichschenklig.

5. Berechnen Sie das Volumen des Quaders mit E(−2/1/4)



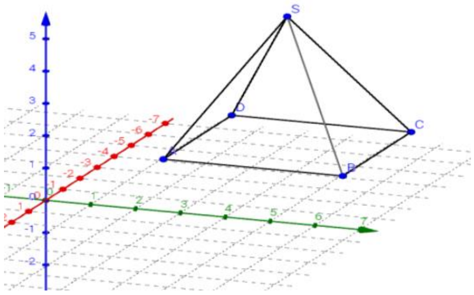
$|\overrightarrow{AB}| = 2$ (kann man ablesen)

$|\overrightarrow{BC}| = 4$

$|\overrightarrow{AE}| = 4$

⇨ V= 2· 4 · 4 = **32**
Das Volumen beträgt 32 Flächeneinheiten.

6. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide mit D(−8/1/0) und S(−6/4/4)!



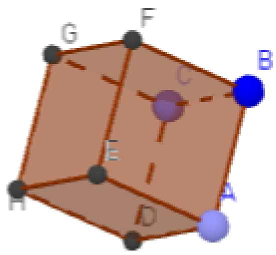
A= (−4/1/0) C(−8/5/0)

$\left|\overrightarrow{AD}\right|$ = 4 ; $\left|\overrightarrow{DC}\right|$=4 ; Höhe: 4 (kann man alles ablesen)

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot 4) \cdot 4 = \mathbf{\frac{64}{3}}$

Das Volumen beträgt 21,33 Flächeneinheiten.

7. Gegeben ist der Quader mit A(3/4/6), B(7/8/8), C(11/6/4) und D(7/2/2), E(5/0/10), F(9/4/12), G(13/2/8) und H(9/−2/6). Berechnen Sie das Volumen!



$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + +4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$V = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Das Volumen beträgt 216 Flächeneinheiten.