

Lösung zur Lagebeziehung zweier Geraden

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h! Geben Sie wenn möglich die Koordinaten des Schnittpunktes an!

a. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, d.h. die Geraden sind parallel oder identisch.

Punktprobe: (z. B.) Liegt $P(2/3/1)$ auf h?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad / - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} s = 0 \\ s = 0,25 \\ s = \frac{1}{3} \end{matrix} \quad \text{d.h. P liegt nicht auf h}$$

=> die Geraden sind parallel

b. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad / - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 3 + r = -3s & I \cdot (-2) \\ -2 + 1,5r = -4s & II \\ 9 + 2r = -5s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} -6 - 2r = 6s & I \\ -2 + 1,5r = -4s & II \\ 9 + 2r = -5s & III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 3 = s & I + III \\ -2 + 1,5r = -4 \cdot 3 & II \\ 9 + 2r = -5s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 3 = s & I + III \\ r = -\frac{20}{3} & II \\ 9 + 2r = -5s & III \end{array}$$

Überprüfen in III: $9 + 2 \cdot \frac{-20}{3} = -5 \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{-13}{3} = -15$ ist offensichtlich falsch

=> die Geraden sind windschief

c. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad / - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 8 + 2r = 3s & I \\ -7 + r = -4s & II \\ 1 - r = s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 8 + 2r = 3s & I \\ -7 + r = -4s & II \\ -6 = -3s & III + II \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 8 + 2r = 3s & I \\ -7 + r = -4 \cdot 2 & II \\ 2 = s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 8 + 2r = 3s & I \\ r = -1 & II \\ 2 = s & III \end{array} \quad \text{Überprüfen in I: } 8 + 2 \cdot (-1) = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 6 = 6$$

=> die Geraden schneiden sich

Berechnung des Schnittpunktes: $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

S(5/-6/7)

d. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

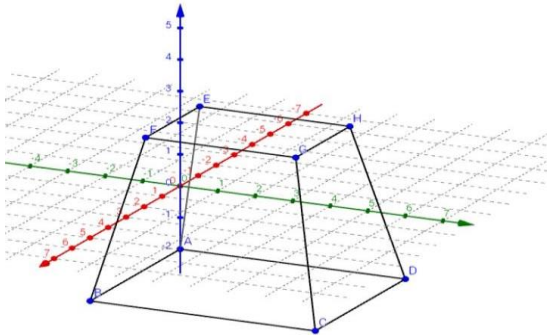
Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, d.h. die Geraden sind parallel oder identisch.

Punktprobe: (z. B.) Liegt P(1/2/3) auf h?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow s = 0,75 \quad \text{d.h. P liegt auf h}$$

⇒ die Geraden sind identisch

2. Gegeben sind die Punkte eines regelmäßigen Pyramidenstumpfs: A(0/0/-2), B(5/0/-2), C(5/6/-2) und E(1/1/3), G(4/5/3), H(1/5/3). Die Gerade f geht durch die Punkte B und H, die Gerade g durch die Punkte C und E und die Gerade h durch die Punkte $M_{\overline{BC}}$ und $M_{\overline{EH}}$. Untersuchen Sie, ob sich die Geraden f, g und h jeweils schneiden und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt!



$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{BC}}: 0,5(\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad M_{\overline{BC}} = (5/3/-2)$$

$$M_{\overline{EH}}: 0,5(\vec{e} + \vec{h}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also ist} \quad M_{\overline{EH}} = (1/3/3)$$

$$\text{d.h. } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

f und g:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 4r = 4s & I \\ -6 - 5r = 5s & II \\ -5r = -5s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = s & I: 4 \\ -6 - 5s = 5s & I \text{ in } II \\ r = s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = s & I \\ s = -0,6 & II \\ r = -0,6 & III \end{array}$$

$$\text{Einsetzen in f: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 0,6 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ f schneidet g in S(2,6/3/1)

f und h:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 4r = 4t & I \\ -3 - 5r = 0 & II \\ -5r = -5t & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = t & I:4 \\ r = -\frac{3}{5} & II \\ r = t & III: (-5) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = t & I \\ r = -\frac{3}{5} & II \\ t = -\frac{3}{5} & II \text{ in } III \end{array}$$

$$\text{Schnittpunkt: } \vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow **f und g schneiden sich in $S(\frac{13}{5}/3/1)$**

g und h:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

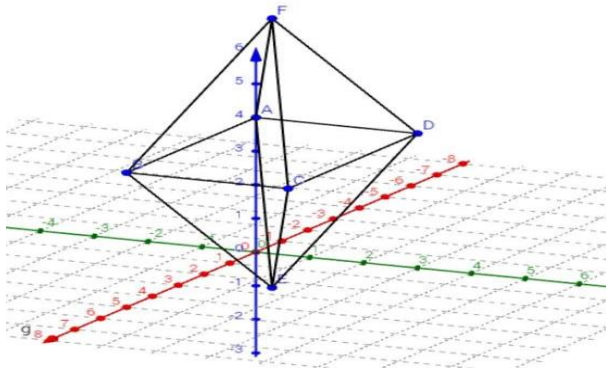
$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 4s = 4t & I \\ 3 + 5s = 0 & II \\ -s = -5t & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} s = t & I:4 \\ r = -\frac{3}{5} & II \\ -s = -5t & III \end{array}$$

Einsetzen in III: $-\left(-\frac{3}{5}\right) = -5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{5} = -3$, das ist falsch

\Rightarrow **g und h sind windschief**

3. Gegeben sind die Punkte eines Polyeders: A(0/0/4), B(5/0/4), C(5/3/4), D(0/3/4), E(2,5/1,5/0) und F(2,5/1,5/8). Die Gerade f geht durch die Punkte B und $M_{\overline{DF}}$, die Gerade g durch die Punkte C und $M_{\overline{BE}}$ und die Gerade h durch die Punkte E und F!

Untersuchen Sie, ob sich die Geraden f, g und h jeweils schneiden und berechnen Sie den Schnittpunkt!



$$M_{\overline{DF}} = (1,25/2,25/6) \text{ und } M_{\overline{BE}} = (3,75/0,75/2)$$

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3,75 \\ -2,25 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

f und g:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3,75 \\ -2,25 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \\ 2 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3,75 \\ -2,25 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3,75r = 1,25s \\ -3 - 2,25r = 2,25s \\ -2r = 2s \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3r = s \\ -3 - 2,25r = 2,25s \\ -r = s \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \\ II:2 \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3r = s \\ -3 - 2,25r = 2,25 \cdot (-r) \\ -r = s \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ III \text{ in } II \\ II \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3r = s \\ -3 = 0 \\ -r = s \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \rightarrow \text{falsch!} \\ II \end{array}$$

ihre Richtungsvektoren sind linear unabhängig

\Rightarrow f und g sind windschief

f und h:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3,75 \\ -2,25 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3,75 \\ -2,25 \\ -2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2,5 + 3,75r = 0 \\ -1,5 - 2,25r = 0 \\ 4 - 2r = 8s \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r = -1,5 \\ -1,5 - 2,25r = 0 \\ 4 - 2 \cdot (-1,5) = 8t \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \\ I \text{ in } II \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r = -1,5 \\ -1,5 - 2,25r = 0 \\ \frac{7}{8} = t \end{array} \right| \begin{array}{l} I \\ II \\ I \text{ in } II \end{array}$$

Überprüfen in II: $-1,5 - 2,2 \cdot (-1,5) = 0 \Leftrightarrow 1,8 = 0$, das ist falsch

ihre Richtungsvektoren sind linear unabhängig

⇒ **f und h sind windschief**

g und h:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \\ 2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 2,5 + 1,25r = 0 & I \\ 1,5 - 2,25r = 0 & II \\ 4 - 2r = 8t & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = -1,5 & I \\ -1,5 - 2,25r = 0 & II \\ 4 - 2 \cdot (-1,5) = 8t & I \text{ in } II \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = -1,5 & I \\ r = -\frac{2}{3} & II \\ \frac{7}{8} = s & III \end{array} \rightarrow \text{das ist ein Widerspruch}$$

ihre Richtungsvektoren sind linear unabhängig

⇒ **f und h sind windschief**

4. Prüfen Sie, ob die Geraden g und h sich im rechten Winkel schneiden!

a. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren müssen orthogonal sein, d.h. das Skalarprodukt dieser Vektoren ist 0!

Überprüfung: $2 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-10) = 0 \checkmark$

⇒ **Die Geraden sind orthogonal.**

b. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}$

Überprüfung: $3 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-33) + 4 \cdot (-12) = 0 \checkmark$

⇒ **Die Geraden sind orthogonal.**

c. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

Überprüfung: $(-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 6 = 52 \neq 0$

⇒ **Die Geraden sind nicht orthogonal.**

5. Aufgaben zu Geradenscharen:

a. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass sich die Geraden schneiden!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} / - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ man muss zuerst die letzten beiden Gleichungen(ohne a) ausrechnen}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 2 - 3r = a \cdot s & I \\ -4 - 5r = 3s & II \\ 6 + 7r = -4s & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 2 - 3r = a \cdot s & I \\ -16 - 20r = 12s & II \cdot 4 \\ 18 + 21r = -12s & III \cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 2 - 3r = a \cdot s & I \\ 2 + r = 0 & II + III \\ 18 + 21r = -12s & III \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 2 - 3r = a \cdot s & I \\ r = -2 & II \\ 18 + 21 \cdot (-2) = -12s & II \text{ in } III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} 2 - 3r = a \cdot s & I \\ r = -2 & II \\ s = 2 & III \end{array} \text{ Einsetzen in I: } 2 - 3 \cdot (-2) = a \cdot 2 \Rightarrow a = 4$$

Für $a = 4$ schneiden sich die Geraden.

b. Gegeben sind die Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ und $h_b: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade g die Gerade h im Punkt $S(3/-4/5)$ schneidet!

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l|l} 5 + r = 3 & I \\ 2r = -4 & II \\ 3 + a \cdot r = 5 & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} r = -2 & I \\ r = -2 & II \\ 3 + a \cdot (-2) = 5 & III \end{array} \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l|l} -1 + 4s = 3 & I \\ -2 + 2b = -4 & II \\ 6 - s = 5 & III \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l|l} s = 1 & I \\ b = -1 & II \\ s = 1 & III \end{array}$$

Für $a = 1$ und $b = -1$ schneiden sich die Geraden.