

## Lösungen zu Textaufgaben zu Geraden im Raum

	Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
1	<p>Die Flugbahn eines Flugzeuges wird beschrieben durch die Gleichung</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4000 \\ 3800 \\ 1800 \end{pmatrix},$ <p>r in Minuten, Koordinaten der Vektoren in Metern. Nach 1,5 Minuten muss der Pilot einen Berg von 2km Höhe überfliegen. Muss er dafür seine Flugroute ändern?</p>	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 4 \end{pmatrix} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 4000 \\ 3800 \\ 1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6030 \\ 5740 \\ 2704 \end{pmatrix};$ <p>die dritte Koordinate gibt die Höhe an. (Man müsste eigentlich nur sie ausrechnen.)</p>	<p>Der Pilot muss den Kurs nicht ändern, da das Flugzeug eine Höhe von 2704 Metern hat.</p>
2	<p>Die Flugbahnen zweier Flugzeuge A und B sind gegeben durch die Gleichungen</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -100 \\ -400 \\ 1100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3600 \\ 3600 \\ -1800 \end{pmatrix}$ <p>und h: <math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ -150 \\ 1000 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1800 \\ -1800 \\ 1800 \end{pmatrix}</math>, r und s in Minuten, Vektoren in Metern.</p> <p>a. Untersuchen Sie, ob (und wenn ja wo) sich die Flugbahnen von A und B schneiden!</p> <p>b. Untersuchen Sie, ob die Flugzeuge A und B zusammenstoßen würden!</p>	<p>a. <math>\begin{pmatrix} -100 \\ -400 \\ 1100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3600 \\ 3600 \\ -1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ -150 \\ 1000 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1800 \\ -1800 \\ 1800 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>\begin{pmatrix} -350 \\ -250 \\ 100 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3600 \\ 3600 \\ -1800 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1800 \\ -1800 \\ 1800 \end{pmatrix}</math></p> <p>b. <math>\left  \begin{array}{l} -350 + 3600r = 1800s \\ -250 + 3600r = -1800s \\ 100 - 1800r = 1800s \end{array} \right  \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left  \begin{array}{l} -350 + 3600r = 1800s \\ -600 + 7200r = 0 \\ 100 - 1800r = 1800s \end{array} \right  \begin{array}{l} I + II \\ II \\ III \end{array}</math></p> <p><math>\left  \begin{array}{l} -350 + 3600 \cdot \frac{1}{12} = 1800s \\ r = \frac{1}{12} \\ 100 - 1800r = 1800s \end{array} \right  \begin{array}{l} II \text{ in } I \\ II \\ III \end{array} \Leftrightarrow \left  \begin{array}{l} s = -\frac{1}{36} \\ r = \frac{1}{12} \\ 100 - 1800r = 1800s \end{array} \right  \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array}</math></p> <p>Überprüfen in III: <math>100 - 1800 \cdot \frac{1}{12} = 1800 \cdot \left(-\frac{1}{36}\right) \Leftrightarrow -50 = -50</math> richtig</p>	<p>Die Flugbahnen treffen sich im Punkt P(200/-100/950)</p>

		<p>Einsetzen in g oder h: <math>\begin{pmatrix} -100 \\ -400 \\ 1100 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3600 \\ 3600 \\ -1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 950 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Sie treffen sich nicht, da das Flugzeug A nach <math>\frac{1}{12}</math> Minuten (= 5 Sekunden) dort ankommt, Flugzeug B an diesem Standort vor <math>\frac{1}{36}</math> Minuten (= vor <math>1,\bar{6}</math> Sekunden) war.</p>
3	<p>Ein Scharfschütze liegt in einem Computerspiel auf einem Dach mit den Koordinaten B(5/0/4,8); er schießt von dem Dach auf den Kopf des Feindes (2,5/1,5/1,8). (Alle Koordinaten in Metern) Dieser bewegt sich jedoch im letzten Moment, sodass der Scharfschütze sein Ziel verfehlt. Wo schlägt die Kugel auf den Boden auf?</p>	<p><math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4,8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 - 5 \\ 1,5 - 0 \\ 1,8 - 4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4,8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,5 \\ -3 \end{pmatrix}</math></p> <p>Wenn die Kugel auf den Boden schlägt, hat sie die Höhe Null, d.h.  <math>4,8 - 3r = 0 \Leftrightarrow r = 1,6</math></p> <p><math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4,8 \end{pmatrix} + 1,6 \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Die Kugel schlägt im Punkt P(1 / 2,4 / 0) auf.</p>
4	<p>Ein U-Boot bewegt sich mit 50km/h fort. Es startet am Punkt P(60/50/0) und bewegt sich in Richtung des Vektors <math>\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>a. Wo befindet sich das U-Boot nach einer halben Stunde?  b. Wo befindet sich das U-Boot nach x Stunden?</p>	<p><math> \vec{v}  = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{84} \approx 9,16</math></p> <p>Einheitsvektor: <math>\frac{1}{\sqrt{84}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}</math></p> <p>Nach einer halben Stunde hat das U-Boot 25 km zurückgelegt, also:</p> <p><math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + 25 \cdot \frac{1}{\sqrt{84}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 65,46 \\ 71,83 \\ -10,92 \end{pmatrix}</math></p>	<p>Nach einer halben Stunde befindet sich das U-Boot im Punkt P(65,46/71,83/-10,92).</p> <p>Nach x Stunden:  <math>\begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + 50 \cdot \frac{x}{\sqrt{84}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}</math></p>