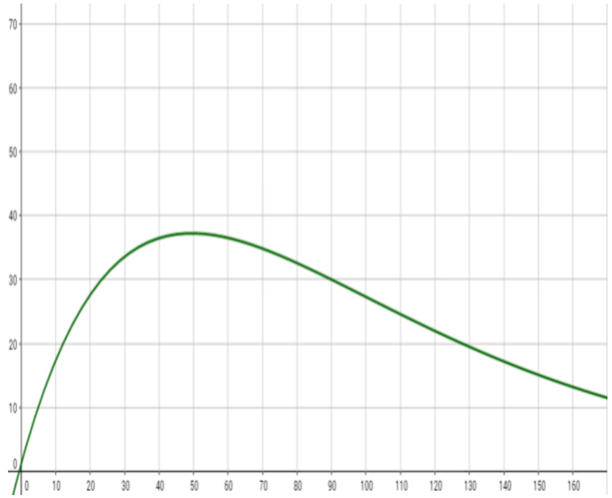
Lösungen zu den Textaufgaben zur e-Funktion

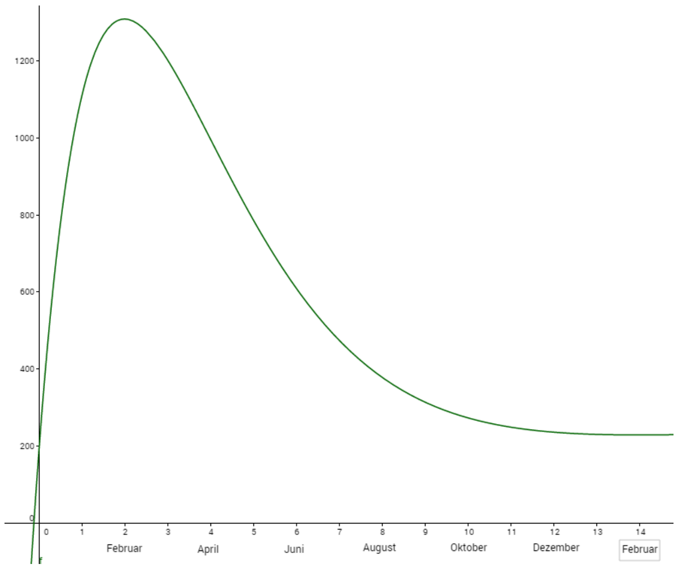
Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1.Eine Funktion f mit $f(x) = (-x^2 + 10x - 24) \cdot e^{0.5x}$ beschreibt den Querschnitt eines Tunnels. a) Berechnen Sie, wie breit der Tunnel ist! b) An der höchsten Stelle des Tunnels sollen Lampen angebracht werden. Berechnen Sie, ob eine Leiter, die zehn Meter hoch reicht, hoch genug ist, um an die Decke heranzukommen. (Sie können davon ausgehen, dass der Mann auf der Leiter sich 1,90m hoch strecken kann!)	a) $(-x^2 + 10x - 24) \cdot e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow (-x^2 + 10x - 24) = 0 \vee e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 4 \vee x_2 = 6 \qquad (e^{0.5x} \neq 0)$ b) Gesucht ist das Maximum der Funktion! $f'(x) = (-2x + 10) \cdot e^{0.5x} + (-x^2 + 10x - 24) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0.5x}$ $= (-2x + 10 - 0{,}5x^2 + 5x - 12) \cdot e^{0.5x}$ $= (-0{,}5x^2 + 3x - 2) \cdot e^{0.5x}$ $f''(x) = (-x + 3) \cdot e^{0.5x} + (-0{,}5x^2 + 3x - 2) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0.5x}$ $= (-x + 3 - 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 1) \cdot e^{0.5x}$ $= (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2) \cdot e^{0.5x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-0{,}5x^2 + 3x - 2) \cdot e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow (-0{,}5x^2 + 3x - 2) = 0 \quad \vee e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 0{,}76 \vee x \approx 5{,}24 \qquad (e^{0.5x} \neq 0)$ $f''(0{,}76) \approx 3{,}27 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(5{,}24) \approx -30{,}83 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(5{,}24) \approx 12{,}94 > 10 + 1{,}90$	Der Tunnel ist 2 m breit. Da der Tunnel 12,94m hoch ist, würde die Leiter nicht hoch genug sein, um die Decke zu erreichen.

2. Eine Funktion $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-0,02x}$ beschreibt das Wachstum eines Bakteriums, x in Stunden. a) Wie viele Bakterien sind nach 50 Stunden vorhanden? b) Wann gibt es die meisten Bakterien? c) Nach 100 Stunden wird das Wachstum des Bakteriums nicht mehr durch f(x) beschrieben, sondern durch die Tangente an f(x) im Punkt (100/f(100))! Stellen Sie die Tangentengleichung auf und berechnen Sie, wann alle Bakterien verschwunden sind! 	a) $f(50) = 37,16$ b) Gesucht ist das Maximum. $f'(x) = 2 \cdot e^{-0,02x} + (2x+1) \cdot (-0,02) \cdot e^{-0,02x}$ $= (2 - 0,04x - 0,02) \cdot e^{-0,02x} = (1,98 - 0,04x) \cdot e^{-0,02x}$ $f''(x) = (-0,04) \cdot e^{-0,02x} + (1,98 - 0,04x) \cdot (-0,02)\, e^{-0,02x}$ $= (0,0008x - 0,0796) \cdot e^{-0,02x}$ $f'(x) = (1,98 - 0,04x) \cdot e^{-0,02x} = 0 \Leftrightarrow 1,98 = 0,04x \;\vee\; e^{-0,02x} = 0$ $\Leftrightarrow x = 49,5 \qquad (e^{-0,02x} \neq 0)$ $f''(49,5) \approx -0,015 < 0 \Rightarrow$ Maximum c) Tangente $t(x) = mx + b$ an $x = 100$: $f(100) = 27,20$, also $P(100/27,20)$; $f'(100) \approx -0,273 = m$ $t(x) = -0,273x + b$ P einsetzen: $27,20 = -0,273 \cdot 100 + b \Leftrightarrow b = 54,5$ $t(x) = -0,273x + 54,5$ $t(x) = 0 \Leftrightarrow 0,273\,x = 54,5 \Leftrightarrow x = 199,63$	Es sind 37 Bakterien vorhanden. Die meisten Bakterien gibt es nach 49,5 Stunden. $t(x) = -0,273x + 54,5$ Nach 199,63 Stunden sind die Bakterien verschwunden.

www.matheportal.wordpress.com

3. Die Funktion $f(x) = (-10x^2 + 110x - 5) \cdot e^{-0,4x+2,6} + 250$ zeigt den Verkauf von Taschenrechner in den Monaten Januar 2015 bis Februar 2016 ($x = 14$) an, $1 \leq x \leq 14$ in Monaten, $f(x)$ gibt die Anzahl der verkauften Taschenrechner an.

   a. Wann werden die meisten und wann die wenigsten Taschenrechner verkauft?
   b. Wann sinkt der Verkauf der Taschenrechner am stärksten?



a. Gesucht sind das Maximum und Minimum:

$f'(x) = (-10x^2 + 110x - 5) \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4x+2,6} + (-20x + 110) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (4x^2 - 44x + 2) \cdot e^{-0,4x+2,6} + (-20x + 110) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (4x^2 - 44x + 2 \ -20x + 110) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (4x^2 - 64x + 112) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$f''(x) = (4x^2 - 64x + 112) \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4x+2,6} + (8x - 64) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (-1,6x^2 + 25,6x - 44,8) \cdot e^{-0,4x+2,6} + (8x - 64) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (-1,6x^2 + 25,6x - 44,8 + 8x - 64) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (-1,6x^2 + 33,6x - 108,8) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 64x + 112 = 0 \lor e^{-0,4x+2,6} = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = 14 \quad (\text{denn } e^{-0,4x+2,6} \neq 0)$

$f''(2) \approx -290,38 < 0 \Rightarrow$ Maximum $\qquad f(2) \approx 1308,69$

$f''(14) \approx 2,39 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\qquad f(14) \approx 228,84$

Ränder: $f(1) \approx 1107,38 < 1308,69 \quad f(14)\ s.o.$

b. Gesucht ist der Wendepunkt (mit minimaler Steigung):

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-1,6x^2 + 33,6x - 108,8) \cdot e^{-0,4x+1} = 0$

$\Leftrightarrow x = 4 \quad \lor x = 17 \ (\notin [1;14]) \ \lor \ e^{-0,4x+2,6} \neq 0$

$f'''(x) = (-1,6x^2 + 33,6x - 108,8) \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4x+2,6} + (-3,2x + 33,6) \cdot e^{0,4x+2,6}$

$= (0,64x^2 - 13,44x + 43,52 - 3,2x + 33,6) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$= (0,64x^2 - 16,64x + 77,12) \cdot e^{-0,4x+2,6}$

$f'''(4) \approx 56,54 > 0 \Rightarrow$ minimale Steigung

$f'(4) \approx -217,46$

Ränder: $f'(1) \approx 469,3 > -217,29 \quad f'(14) = 0 > -217,2$

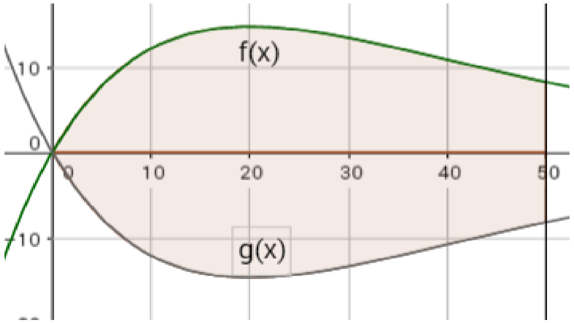
Die meisten Taschenrechner werden am 1. Februar 2015 verkauft, nämlich 1308 Stück; die wenigsten Taschenrechner werden Anfang Februar 2016 verkauft, nämlich 228 Stück.

Die Verkaufszahlen fallen am stärksten am 1. April 2015.

4. Ein See wird im Norden von der Funktion $f(x) = 2x \cdot e^{-0,05x}$ und im Süden von der Funktion $g(x) = -2x \cdot e^{-0,05x}$ begrenzt. Im Osten begrenzt ihn die Gerade $x = 50$. (x und f(x) in km)
Der See ist überall 4m tief.

a) Berechnen Sie die maximale Breite des Sees.

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-40x-800) \cdot e^{-0,05x}$ eine Stammfunktion von f(x) ist.
Berechnen Sie die Wassermenge des Sees!



a) Gesucht Maximum:

$f'(x) = 2 \cdot e^{-0,05x} + 2x \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05x} = (2 - 0,1x) \cdot e^{-0,05x}$

$f''(x) = (-0,1) \cdot e^{-0,05x} + (2 - 0,1x) \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05x}$

$= (-0,2 + 0,005x) \cdot e^{-0,05x}$

$f'(x) = (2 - 0,1x) \cdot e^{-0,05x} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,1x \quad \vee \; e^{-0,05x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 20 \qquad (e^{-0,05x} \neq 0)$

$f''(20) = -0,037 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f(20) \approx 14,72$

[Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$; $f(50) \approx 8,2$]

Da f(x) und g(x) an der x-Achse gespiegelt sind, hat g(x) an der Stelle x = 20 ein Minimum.

b) $F'(x) = (-40x-800) \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05x} + (-40) \cdot e^{-0,05x}$

$= (2x + 40 - 40) \cdot e^{-0,05x} = 2x \cdot e^{-0,05x} = f(x)$

$A = 2 \cdot \int_0^{50} f(x)dx = 2 \cdot [F(x)]_0^{50}$

$= 2 \cdot [(-2000-800) \cdot e^{-2.5} - (-800) \cdot e^{0}] = 1140,32$

$1140,32 \text{ km}^2 \cdot 4\text{m} = 1140,32 \text{ km}^2 \cdot 0,004\text{km} = 4,56 \text{ km}^3$

Der See ist 29,44 km breit.

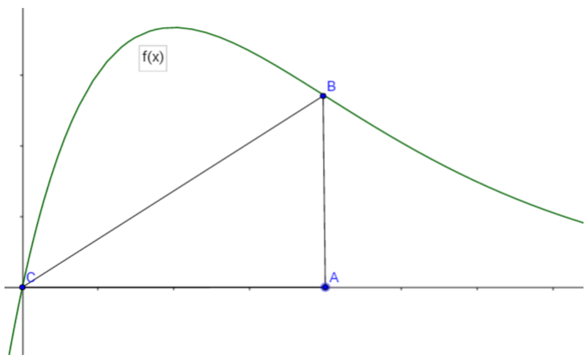
Der See enthält 4,56 km³ Wasser.

5. Ein Schreiner hat ein abgebrochenes Stück Holz, dessen Kante durch die Funktion f mit $f(x) = 5x \cdot e^{-x}$ begrenzt ist, $0 < x < 10$, x in m.

a) Berechnen Sie für den Graphen von f die Nullstelle!

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (-5x - 5) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall [0;10] mit der x-Achse einschließt!

c) Der Schreiner möchte aus dem Stück Holz ein möglichst großes Dreieck mit den Eckpunkten A(a/0), B(a/f(a)), C(0/0) herausschneiden (a > 0). Wie muss man a dazu wählen?



a) $f(x) = 5x \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 5x = 0 \vee e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad (e^{-x} \neq 0)$

b) $F'(x) = (-5x - 5) \cdot (-1) \cdot e^{-x} + (-5) \cdot e^{-x}$

$= (5x + 5 - 5) \cdot e^{-x} = 5x \cdot e^{-x} = f(x)$

$A = \int_0^{10} f(x)dx = [(-5x - 5) \cdot e^{-x}]_0^{10} \approx -0{,}0025 - (-5)$

≈ 5

c) Gesucht: Funktion A(a):

Fläche des rechtwinkligen Dreiecks: $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

hier: $g = a$ und $h = f(a) = 5a \cdot e^{-a}$

$A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5a \cdot e^{-a} = 2{,}5\, a^2 \cdot e^{-a}$

$A'(a) = 5a \cdot e^{-a} + 2{,}5a^2 \cdot (-1) \cdot e^{-a} = (5a - 2{,}5a^2) \cdot e^{-a}$

$A''(a) = (5 - 5a) \cdot e^{-a} + (5a - 2{,}5a^2) \cdot (-1) \cdot e^{-a}$

$= (2{,}5a^2 - 10a + 5) \cdot e^{-a}$

$A'(a) = (5a - 2{,}5a^2) \cdot e^{-a} = 0 \Leftrightarrow 5a - 2{,}5a^2 \vee e^{-a} = 0$

$\Leftrightarrow a \cdot (5 - 2{,}5a) = 0 \; (e^{-a} \neq 0)$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$

$A''(2) \approx -0{,}68 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$A''(0) = 5 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$A(2) = 1{,}35$ [Rand: $A(10) = 0{,}01$ und $A(0) = 0$]

Die Nullstelle ist bei x = 0.

Der Flächeninhalt der Fläche zwischen f und der x-Achse beträgt 5.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist für a = 2 am größten und hat dann einen Flächeninhalt von $1{,}35\ m^2$.