Lösungen zu den Textaufgaben mit Ableitung zur e-Funktion

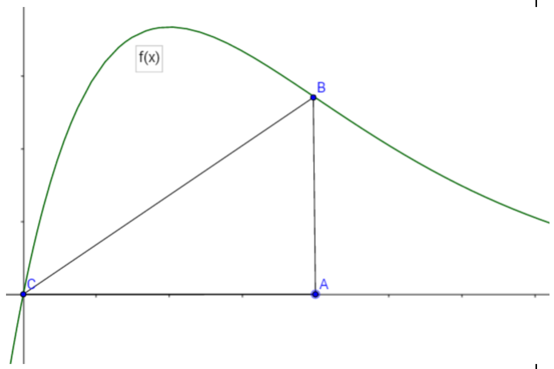
Aufgabe	Rechenweg	Lösung
1. Eine Funktion f mit $f(x) = (-x^2 + 10x - 24) \cdot e^{0.5x}$ beschreibt den Querschnitt eines Tunnels. a) Berechnen Sie, wie breit der Tunnel ist! b) An der höchsten Stelle des Tunnels sollen Lampen angebracht werden. Berechnen Sie, ob eine zehn Meter lange Leiter reicht, um an die Decke heranzukommen. (Sie können davon ausgehen, dass der Mann auf der Leiter 1,80m ist!)	a) $(-x^2 + 10x - 24) \cdot e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow (-x^2 + 10x - 24) = 0 \vee e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 4 \vee x_2 = 6 \qquad (e^{0.5x} \neq 0)$ b) Gesucht ist das Maximum der Funktion! $f'(x) = (-2x + 10)\,) \cdot e^{0.5x} + = (-x^2 + 10x - 24) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0.5x}$ $= (-2x + 10 - 0{,}5x^2 + 5x - 12) \cdot e^{0.5x}$ $= (-0{,}5x^2 + 3x - 2) \cdot e^{0.5x}$ $f''(x) = (-x + 3) \cdot e^{0.5x} + (-0{,}5x^2 + 3x - 2) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0.5x}$ $= (-x + 3 - 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 1) \cdot e^{0.5x}$ $= (-0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2) \cdot e^{0.5x}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-0{,}5x^2 + 3x - 2) \cdot e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow (-0{,}5x^2 + 3x - 2) = 0 \vee e^{0.5x} = 0$ $\Leftrightarrow x \approx 0{,}76 \vee x \approx 5{,}24 \quad (e^{0.5x} \neq 0)$ $f''(0{,}76) \approx 3{,}27 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(5{,}24) \approx -30{,}83 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(5{,}24) \approx 12{,}94$	Der Tunnel ist 2 m breit. Der Tunnel ist 12,94m hoch.

2. Eine Funktion $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-0,02x}$ beschreibt das Wachstum eines Bakteriums, x in Stunden. a) Wie viele Bakterien sind nach 50 Stunden vorhanden? b) Wann gibt es die meisten Bakterien? c) Nach 100 Stunden wird das Wachstum des Bakteriums nicht mehr durch f(x) beschrieben, sondern durch die Tangente an f(x) im Punkt (100/f(100))! Stellen Sie die Tangentengleichung auf und berechnen Sie, wann alle Bakterien verschwunden sind!	a) $f(50) = 31,56$ b) Gesucht ist das Maximum. $f'(x) = 2 \cdot e^{-0,02x} + (2x+1) \cdot (-0,02) \cdot e^{-0,02x}$ $= (2 - 0,04x - 0,02) \cdot e^{-0,02x} = (1,98 - 0,04x) \cdot e^{-0,02x}$ $f''(x) = (1,98 - 0,04x) \cdot (-0,02)\, e^{-0,02x} + (-0,04) \cdot e^{-0,02x}$ $= (0,0008x - 0,0796) \cdot e^{-0,02x}$ $f'(x) = (1,98 - 0,04x) \cdot e^{-0,02x} = 0 \Leftrightarrow 1,98 = 0,04x \;\vee\; e^{-0,02x} = 0$ $\Leftrightarrow x = 49,5 \quad (e^{-0,02x} \neq 0)$ $f''(49,5) \approx -0,015 < 0 \Rightarrow$ Maximum c) Tangente $t(x) = mx + b$ an $x = 100$: $f(100) = 27,20 \quad f'(100) \approx -0,273 = m$ $t(x) = -0,273x + b$ $27,20 = -0,273 \cdot 100 + b \Leftrightarrow b = 54,5$ $t(x) = -0,273x + 54,5$ $t(x) = 0 \Leftrightarrow 0,273x = 54,5 \Leftrightarrow x = 199,63$	Es sind 31 Bakterien vorhanden. Die meisten Bakterien gibt es nach 49,5 Stunden. $t(x) = -0,273x + 54,5$ Nach 199,63 Stunden sind die Bakterien verschwunden.
3. Ein See wird im Norden von der Funktion $f(x) = 2x \cdot e^{-0,05x}$ und im Süden von der Funktion $g(x) = -2x \cdot e^{-0,05x}$ begrenzt. Im Osten begrenzt ihn die Gerade x = 50. (x und f(x) in km) Berechnen Sie die maximale Breite des Sees!	Gesucht Maximum: $f'(x) = 2 \cdot e^{-0,05x} + 2x \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05x} = (2 - 0,1x) \cdot e^{-0,05x}$ $f''(x) = (-0,1) \cdot e^{-0,05x} + (2 - 0,1x) \cdot (-0,05) \cdot e^{-0,05x}$ $= (-0,2 + 0,005x) \cdot e^{-0,05x}$ $f'(x) = (2 - 0,1x) \cdot e^{-0,05x} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,1x \;\vee\; e^{-0,05x} = 0$ $\Leftrightarrow x = 20 \quad (e^{-0,05x} \neq 0)$ $f''(20) = -0,037 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(20) \approx 14,72$ [Untersuchung der Ränder: $f(0) = 0$; $f(50) \approx 0,67$] Da f(x) und g(x) an der x-Achse gespiegelt sind, hat auch g(x) an der Stelle x = 20 ein Minimum.	Der See ist 29,44 km breit.

4. Ein Schreiner hat ein abgebrochenes Stück Holz, deren Kante durch die Funktion f mit $f(x) = 5x \cdot e^{-x}$ begrenzt ist, $0 < x < 10$, x und f(x) in m.

a) Berechnen Sie für den Graphen von f die Nullstelle!

b) Der Schreiner möchte aus dem Stück Holz ein möglichst großes Dreieck mit den Eckpunkten A(a/0), B(a/f(a)), C(0/0) herausschneiden (a > 0). Wie muss man a dazu wählen?



a) $f(x) = 5x \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 5x = 0 \lor e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad (e^{-x} \neq 0)$

b) Gesucht: Funktion A(a):

Fläche des rechtwinkligen Dreiecks: $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

hier: $g = a$ und $h = f(a) = 5a \cdot e^{-a}$

$A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5a \cdot e^{-a} = 2{,}5\, a^2 \cdot e^{-a}$

$A'(a) = 5a \cdot e^{-a} + 2{,}5a^2 \cdot (-1) \cdot e^{-a} = (5a - 2{,}5a^2) \cdot e^{-a}$

$A''(a) = (5 - 5a) \cdot e^{-a} + (5a - 2{,}5a^2) \cdot (-1) \cdot e^{-a}$

$= (2{,}5a^2 - 10a + 5) \cdot e^{-a}$

$A'(a) = (5a - 2{,}5a^2) \cdot e^{-a} = 0 \Leftrightarrow 5a - 2{,}5a^2 \lor e^{-a} = 0$

$\Leftrightarrow a\,(5 - 2{,}5a) = 0 \quad (e^{-a} \neq 0)$

$\Leftrightarrow a = 0 \lor a = 2$

$A''(2) \approx -0{,}68 < 0 \Rightarrow$ Maximum (a = 0 offensichtlich Minimum)

$A(2) = 1{,}35$ [Rand: $A(10) = 0{,}01$]

Die Nullstelle ist bei x = 0.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist für a = 2 am größten und hat dann einen Flächeninhalt von $1{,}35\ m^2$.