Lösungen zu den Übungen zu Wendepunkten

Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion und untersuchen Sie, ob es sich um maximale oder minimale Steigung handelt!

Aufgabe	Rechnung	Ergebnis
a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$	$f'(x) = x^2 - 2x$ $\quad f''(x) = 2x - 2$ $\quad f'''(x) = 2$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f'''(1) = 2 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $\quad f(1) = -\frac{2}{3}$	$W(1/-\frac{2}{3})$ minimale Steigung
b. $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 96x^2 + 36x + 72$	$f'(x) = 8x^3 + 24x^2 - 192x + 36$ $\quad f''(x) = 24x^2 + 48x - 192$ $\quad f'''(x) = 48x + 48$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x^2 + 48x - 192 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$ $f'''(-4) = -144 < 0 \Rightarrow$ WP mit maximaler Steigung $\quad f(-4) = -1608$ $f'''(2) = 48 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $\quad f(2) = -144$	$W_1(-4/-1608)$ maximale Steigung $W_2(2/-144)$ minimale Steigung
c. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x$	$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ $\quad f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ $\quad f'''(x) = 12x^2 - 24x + 8$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$ $f'''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $\quad f(0) = 0$ $f'''(1) = -4 < 0 \Rightarrow$ WP mit maximaler Steigung $\quad f(1) = \frac{38}{15}$ $f'''(2) = 8 > 0 \Rightarrow$ WP mit minimaler Steigung $\quad f(2) = \frac{76}{15}$ Vergleich an der Stelle x = 2 und x = 0: $f'(0) = 2$ und $f'(2) = 2$, d.h. in beiden WP ist die Steigung mit 2 lokal und absolut minimal.	$W_1(0/0)$ minimale Steigung $W_2(1/\frac{38}{15})$ maximale Steigung $W_3(2/\frac{76}{15})$ minimale Steigung

d. $f(x) = x^6 - 240x^2$	$f'(x) = 6x^5 - 480x$ $\quad f''(x) = 30x^4 - 480$ $\quad f'''(x) = 120x^3$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^4 - 480 = 0 \Leftrightarrow 30x^4 = 480 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$ $f'''(2) = 1440 > 0$ => WP mit minimaler Steigung $\quad f(2) = -896$ $f'''(-2) = -1440 < 0$ => WP mit maximaler Steigung $\quad f(-2) = -896$	W(–2/–896) maximale Steigung W(2/–896) minimale Steigung
e. $f(x) = 4x^4 - 16x^3 - 360x^2 + 96x + 10$	$f'(x) = 16x^3 - 48x^2 - 720x + 96$ $\quad f''(x) = 48x^2 - 96x - 720$ $\quad f'''(x) = 96x - 96$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 48x^2 - 96x - 720 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5$ $f'''(-3) = -384 < 0$ => WP mit maximaler Steigung $\quad f(-3) = -2762$ $f'''(5) = 384 > 0$ => WP mit minimaler Steigung $\quad f(5) = -8010$	W(–3/–2762) maximale Steigung W(5/–8010) minimale Steigung
f. $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$	$f'(x) = 18x - 12$ $\quad f''(x) = 18$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 18 = 0$ geht nicht => kein Wendepunkt	kein Wendepunkt
2. In einem Stausee wird bei Hochwasser Wasser gespeichert. Der Zufluss des Wassers kann durch die Funktion $f(x) = -\frac{1}{60}x^3 + 0{,}5x^2 - 4x + 15$ dargestellt werden, x in Sekunden mit $0 < x < 20$ und f(x) in $10m^3$/Sekunde. Wann steigt der Zufluss am schnellsten an? Wie viel m^3 fließen zu diesem Zeitpunkt dazu?	$f'(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x - 4$ $f''(x) = -\frac{1}{10}x + 1$ $f'''(x) = -\frac{1}{10}$ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ $f'''(10) = -\frac{1}{10} < 0$ => maximale Steigung $f(10) = 8{,}\overline{3}$	Nach 10 Sekunden steigt der Zufluss mit 83,33 m^3 am schnellsten an.