Lösung Kurvendiskussion von zusammengesetzten e-Funktionen:

Berechnen Sie die Nullstellen, lokalen Extrema, Wendepunkte, das Krümmungsverhalten und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$!

Aufgabe	Rechenweg	Ergebnis
$f(x) = 2x^2 \cdot e^{-0,1x}$	**Nullstellen:** $2x^2 \cdot e^{-0,1x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee e^{-0,1x} = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee e^{-0,1x} \neq 0$ **Extrema:** $f'(x) = 4x \cdot e^{-0,1x} + 2x^2 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1x} = e^{-0,1x} \cdot (4x-0,2x^2)$ mit Ketten- und Produktregel notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow e^{-0,1x} \cdot (4x-0,2x^2)$ ein Produkt ist 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist $\Leftrightarrow e^{-0,1x} = 0 \vee 4x-0,2x^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,1x} \neq 0 \vee x= 0 \vee x = 20$ $f''(x) = e^{-0,1x} \cdot (4x-0,2x^2) \cdot (-0,1) + e^{-0,1x} \cdot (4-0,4x) = (0,02x^2 -0,8x + 4) \cdot e^{-0,1x}$ notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$: $f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(20) = -2,7 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(0) = 0 \qquad f(20) \approx 108,27$ **Wendepunkte:** notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow (0,02x^2 -0,8x + 4) \cdot e^{-0,1x} = 0$ $\Leftrightarrow e^{-0,1x} = 0 \vee 0,02x^2 -0,8x + 4= 0$ $\Leftrightarrow e^{-0,1x} \neq 0 \quad x \approx 5,85 \vee x \approx 34,14$ notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$: $f'''(5,85) \approx -0,31 \neq 0$ (maximale Steigung) $f(5,85) \approx 38,13$ $f'''(34,14) \approx 0,01 \neq 0$ (minimale Steigung) $f(34,14) \approx 76,71$	Nullstellen: x = 0 HP(20/≈108,27) TP(0/0) $W_1(5,85/\approx 38,13)$ $W_2(34,14/\approx 76,71)$

	Krümmungsverhalten: x < 5,85, z.B. x = 0: f ''(0) = 4 > 0 =>linksgekrümmt 5,85 < x < 34,14, z.B. x = 10: f ''(10) ≈−0,74 < 0 => rechtsgekrümmt x > 34,14, z.B. x = 40: f ''(40) ≈0,073 > 0 => linksgekrümmt **Grenzverhalten:** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = 0$ da die Steigung der e-Funktion stärker ist als die jeder ganzrationalen Funktion, bestimmt die e-Funktion das Verhalten des Graphen im Unendlichen $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = \infty$	f ist linksgekrümmt für x < 5,85 f ist linksgekrümmt für x > 34,14 f ist rechtsgekrümmt für 5,85 < x < 34,14 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2 \cdot e^{-0,1x}) = \infty$
$f(x) = (4 + 4x) \cdot e^{2x}$	**Nullstellen:** $f(x) = (4x + 4) \cdot e^{2x} = 0$ $\Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \quad \vee\ e^{2x} = 0$ $\Leftrightarrow 4x = -4 \qquad (e^{4x} \neq 0) \quad \Leftrightarrow x = -1$ **Extrema:** $f'(x) = 4 \cdot e^{2x} + (4x + 4) \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (4 + 8x + 8) = e^{2x} \cdot (8x + 12)$ $f''(x) = 8 \cdot e^{2x} + (8x + 12) \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (8 + 16x + 24) = e^{2x} \cdot (16x + 32)$ $f'(x) = e^{2x} \cdot (8x + 12) = 0$ $\Leftrightarrow 8x + 12 = 0 \quad \vee\ e^{2x} = 0$ $\Leftrightarrow 8x = -12 \qquad (e^{2x} \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ $f''(-\frac{3}{2}) = e^{-3} \cdot (-24 + 32) = 8 \cdot e^{-3} > 0$ => Minimum $f(-\frac{3}{2}) = -2 \cdot e^{-3} \approx -0,0996$	Nullstelle: $x = -1$ Minimum$(-\frac{3}{2}/-2 \cdot e^{-3})$

Wendepunkte:

$f''(x) = e^{2x} \cdot (16x + 32)$

$f'''(x) = 16 \cdot e^{2x} + (16x + 32) \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (16 + 32x + 64) = e^{2x} \cdot (32\,x + 80)$

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} \cdot (16x + 32) = 0$

$\Leftrightarrow (16x + 32) = 0 \quad \vee\ e^{2x} = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \qquad\qquad (e^{2x} \neq 0)$

$f'''(-2) = e^{-4} \cdot (-64 + 80) = 16 \cdot e^{-4} \neq 0$ => Wendepunkt

$f(-2) = 2 \cdot e^{-3} \approx 0{,}0996$

Krümmungsverhalten:

$x < -2$, z.B. $x = -4$: $f''(-4) = -32 \cdot e^{-4} < 0$ => rechtsgekrümmt

$x > -2$, z.B. $x = 0$: $f''(0) = 32 > 0$ => linksgekrümmt

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{(4+4x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{e^{2x}}\Big] = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\underset{\substack{\downarrow\\ -\infty}}{(4+4x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{e^{2x}}\Big] = 0$$

(da die e-Funktion den Verlauf bestimmt)

Wendepunkt $W(-2 / \approx 0{,}0996)$

für $x < -2$ ist f rechtsgekrümmt,

für $x > -2$ ist f linksgekrümmt,

$\lim_{x\to\infty}[(4+4x) \cdot e^{2x}] = \infty$

$\lim_{x\to\infty}[(4+4x) \cdot e^{2x}] = 0$

$f(x) = (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2}$	**Nullstellen:** $(2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0 \Leftrightarrow 2{,}5x^2 - 125 = 0 \vee e^{0{,}4x-2} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = 50 \quad \vee e^{0{,}4x-2} \neq 0$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{50} \vee x = -\sqrt{50}$ **Extrema:** $f'(x) = (5x) \cdot e^{0{,}4x-2} + (2{,}5x^2 - 125) \cdot (0{,}4) \cdot e^{0{,}4x-2} = e^{0{,}4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50)$ notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50) = 0$ $\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} = 0 \vee (x^2 + 5x - 50) = 0 \Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} \neq 0 \vee x = 5 \vee t = -10$ $f''(x) = e^{0{,}4x-2} \cdot (x^2 + 5x - 50) \cdot (0{,}4) + e^{0{,}4x-2} \cdot (2x + 5)$ $= (0{,}4x^2 + 4x - 15) \cdot e^{0{,}4x-2}$ notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$: $f''(5) = 15 > 0 \Rightarrow$ Minimum $f''(-10) \approx -0{,}037 < 0 \Rightarrow$ Maximum $f(5) = -62{,}5 \qquad f(20) \approx -155{,}23$ **Wendepunkte:** notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $\Leftrightarrow (0{,}4x^2 + 4x - 15) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0$ $\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} = 0 \vee 0{,}4x^2 + 4x - 15 = 0$ $\Leftrightarrow e^{0{,}4x-2} \neq 0 \quad x \approx -12{,}9 \vee x \approx 2{,}9$ notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$: $f'''(x) = (0{,}4x^2 + 4x - 15) \cdot 0{,}4 \cdot e^{0{,}4x-2} + (0{,}8x + 4) \cdot e^{0{,}4x-2}$ $= (0{,}16x^2 + 2{,}4x + 2) \cdot e^{0{,}4x-2}$	Nullstellen: $x = \sqrt{50}$ ($\approx 7{,}07$) $\vee x = -\sqrt{50}$ HP($-10/-62{,}5$) TP($20/\approx -155{,}23$) $W_1(-12{,}9/\approx 0{,}23)$ $W_2(2{,}9/\approx -44{,}89)$

	$f'''(-12{,}9) \approx -55{,}02 \neq 0$ (maximale Steigung) $f(-12{,}9) \approx 0{,}23$ $f'''(2{,}9) \approx 0{,}45 \neq 0$ (minimale Steigung) $f(2{,}9) \approx -44{,}89$ **Krümmungsverhalten:** $x < -12{,}9$, z.B. $x = -20$: $f''(-20) \approx 0{,}003 > 0$ =>linksgekrümmt $-12{,}9 < x < 2{,}9$, z.B. $x = 10$: $f''(0) \approx -2{,}03 < 0$ => rechtsgekrümmt $x > 2{,}9$, z.B. $x = 10$: $f''(10) \approx 480{,}29 > 0$ => linksgekrümmt **Grenzverhalten:** $\lim\limits_{x\to\infty} (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0$	$x < -12{,}9$ => f ist linksgekrümmt $-12{,}9 < x < 2{,}9$ => rechtsgekrümmt $x > 2{,}9$ => f ist linksgekrümmt $\lim\limits_{x\to\infty} (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (2{,}5x^2 - 125) \cdot e^{0{,}4x-2} = 0$