

Lösungen zu den Zusammenfassende Übungen zu ganzrationalen Funktionen

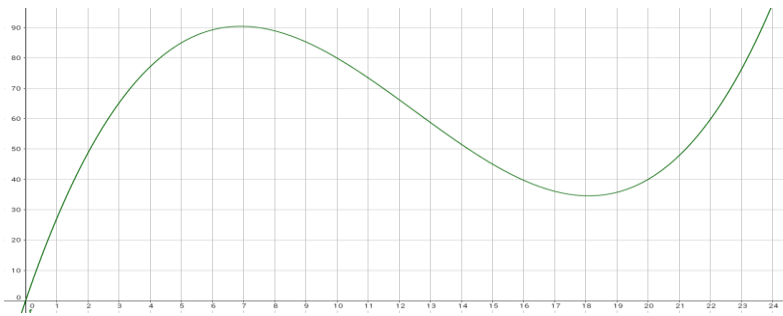
Berechnen Sie alle Aufgaben soweit möglich ohne die polyroots-Funktion des Taschenrechners!

Aufgabe	Lösung
<p>1. Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsvorschrift?</p> <p>a) $f(x) = 2x^5 + 3x^2$ b) $f(x) = 2x^4 - 3$ c) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3$ d) $f(x) = -2x^5 + 3x^2 - 3$ e) $f(x) = 2x^5 + 3x^3$ f) $f(x) = -2x^5 + 3x^3$</p>	<p>1b 2c 3a 4f 5d 7e</p>
<p>2. Bestimmen Sie die Symmetrie und $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$!</p> <p>a. $f(x) = x^8 + 3x^5$ b. $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 3$ c. $f(x) = -3x^4 + 4x^2 + 4$ d. $f(x) = -5x^3 - 2x$</p>	<p>a. keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorkommen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$</p> <p>b. nicht punktsymmetrisch zu (0/0), es kommen zwar nur ungerade Exponenten vor, allerdings auch ein Summand ohne x; (punktsymmetrisch zu (0/3)) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$</p> <p>c. achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten vorkommen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$</p> <p>d. punktsymmetrisch zu (0/0), da nur ungerade Exponenten vorkommen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$</p>
<p>3. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen!</p> <p>a. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 45$ b. $f(x) = 2x^4 + 22x^2 + 240$ c. $f(x) = -3x^4 + 123x^2 - 1200$</p>	<p>a. $x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z - 45 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-45)} = 2 \pm 7$ $\Leftrightarrow z_1 = 9 \vee z_2 = -5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \vee x^2 = -5 \Leftrightarrow \mathbf{x = 3 \vee x = -3}$</p> <p>b. $2x^4 + 22x^2 + 240 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 11x^2 + 120 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 11z + 120 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 120} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{-89,75}$ keine Lösung, d.h. keine Nullstelle</p> <p>c. $-3x^4 + 123x^2 - 1200 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 41z + 400 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{41}{2}\right)^2 - 400} \approx 20,5 \pm 4,5 \Leftrightarrow z_1 = 25 \vee z_2 = 16$ $\Leftrightarrow x^2 = 25 \vee x^2 = 16 \Leftrightarrow \mathbf{x = 5 \vee x = -5 \vee x = 4 \vee x = -4}$</p>

<p>d. $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x$</p> <p>e. $f(x) = x \cdot (x-4)$</p> <p>f. $f(x) = (x+5) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2$</p> <p>g. $f(x) = (-2x^2 + 22x - 48) \cdot (3x^2 + 6x)$</p> <p>h. $f(x) = 2x^4 - 32$</p> <p>i. $f(x) = \frac{1}{2}x^7 + 8192$</p> <p>j. $f(x) = \frac{2}{x^2} - 162 \quad x \neq 0$</p> <p>k. $f(x) = 5x^6 + 5$</p>	<p>d. $x^3 + 10x^2 + 25x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 10x + 25) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 25}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5 \pm \sqrt{0} \Leftrightarrow \mathbf{x = 0 \vee x = 5}$</p> <p>e. $x \cdot (x-4) \Leftrightarrow x = 0 \vee (x-4) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0 \vee x = 4}$</p> <p>f. $(x+5) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2 \Leftrightarrow \mathbf{x = -5 \vee x = 3 \vee x = -2}$</p> <p>g. $(-2x^2 + 22x - 48) \cdot (3x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 22x - 48 = 0 \vee 3x^2 + 6x = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \vee x \cdot (3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 24} \vee x = 0 \vee x = -2$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = 5,5 \pm 2,5 \vee x = 0 \vee x = -2 \Leftrightarrow \mathbf{x = 3 \vee x = 8 \vee x = 0 \vee x = -2}$</p> <p>h. $2x^4 - 32 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2 \Leftrightarrow \mathbf{x = 2 \vee x = -2}$</p> <p>i. $\frac{1}{2}x^7 + 8192 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{16384} \Leftrightarrow \mathbf{x = -4}$</p> <p>j. $\frac{2}{x^2} - 162 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2} = 162 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{162} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{81}} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{1}{9} \vee x = -\frac{1}{9}}$</p> <p>k. $5x^6 + 5 = 0 \Leftrightarrow 5x^6 = -5 \Leftrightarrow x^6 = -1$ keine Lösung, d.h. keine Nullstelle</p>
<p>4. Bestimmen Sie alle Stellen x, an denen die Funktion f den Wert 9 annimmt!</p> <p>a. $f(x) = 0,6x^4 - 12x^2 + 66,6$</p> <p>b. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 20x + 25$</p>	<p>a. $0,6x^4 - 12x^2 + 66,6 = 9 \Leftrightarrow 0,6x^4 - 12x^2 + 57,6 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 20x^2 + 96 = 0$ $\Leftrightarrow z^2 - 20z + 96 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 96} = 10 \pm 2 \Leftrightarrow z_1 = 12 \vee z_2 = 8$ $\Leftrightarrow \mathbf{x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}}$</p> <p>b. $2x^3 + 2x^2 - 20x + 25 = 9 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 20x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = -4$ mit TR oder mit Polynomdivision: $x^3 + x^2 - 10x + 8 : (x - 2) = x^2 + 3x - 4$ $\begin{array}{r} \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ 3x^2 - 10x \\ \underline{-(3x^2 - 6x)} \\ -4x + 8 \\ \underline{-(-4x + 8)} \\ 0 \end{array}$ $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$ (p-q-Formel) $\Leftrightarrow \mathbf{x = 1 \vee x = 2 \vee x = -4}$</p>

<p>5. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionen!</p> <p>a. $f(x) = x^2 - 7x - 6$ und $g(x) = x + 3$</p> <p>b. $f(x) = 3x^2 + 2x + 20$ und $g(x) = 2x^2 + 6x + 9$</p> <p>c. $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 4$ und $g(x) = 2x^4 + 6x^2 - 8$</p>	<p>a. $x^2 - 7x - 6 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-9)} = 4 \pm 5$ $\Leftrightarrow x = 9 \vee x = -1 \quad f(9) = 12 \quad f(-1) = 2 \Rightarrow S_1(-1/2) \quad S_2(9/12)$</p> <p>b. $3x^2 + 2x + 20 = 2x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 11 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 11} = 2 \pm \sqrt{-7}$ kein Schnittpunkt</p> <p>c. $4x^4 - 8x^2 + 4 = 2x^4 + 6x^2 - 8 \Leftrightarrow 2x^4 - 14x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 7z + 6 = 0$ $\Leftrightarrow z_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6} = 3,5 \pm 2,5 \Leftrightarrow x^2 = 6 \vee x^2 = 1$ $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6} \quad f(1) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(-\sqrt{6}) = 100, \quad f(\sqrt{6}) = 100$ $S_1(-1/0) \quad S_2(1/0) \quad S_1(-\sqrt{6}/100) \quad S_2(\sqrt{6}/100)$</p>
<p>6. Die Punkte P, Q und R liegen auf dem Graphen der Potenzfunktion $f(x) = 4x^4$!</p> <p>a. Bestimmen Sie jeweils die fehlenden Koordinaten! $P(3/y)$, $Q(-2/y)$, $R(x/1024)$ und $S(x/0,25)$</p> <p>b. Liegt der Punkt $S(-5/2500)$ auf dem Graphen? Liegt der Punkt $T(2/62)$ auf, unter oder über dem Graphen?</p>	<p>a. $f(3) = 324 \Rightarrow P(3/324) \quad f(-2) = 64 \Rightarrow Q(-2/64)$ $4x^4 = 1024 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4 \Rightarrow R_1(-4/1024) \quad R_2(4/1024)$ $4x^4 = 0,25 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{0,0625} = \pm 0,5 \Rightarrow S_1(-0,5/0,25) \quad S_2(0,5/0,25)$</p> <p>b. $f(-5) = 2500$, d.h. S liegt auf dem Graphen $f(2) = 64 > 62$, d.h. T liegt unter dem Graphen</p>
<p>7. Gegeben ist eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.</p> <p>a. Die Punkte $P(0/-4)$, $R(2/20)$ und $Q(-1/-7)$ liegen auf dem Graphen dieser Funktion. Bestimmen Sie a, b und c!</p> <p>b. Die Punkte $P(2/-8)$, $R(-3/-43)$ und $Q(4/-50)$ liegen auf dem Graphen dieser Funktion. Bestimmen Sie a, b und c!</p>	<p>a. $f(0) = -4 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -4 \Rightarrow c = -4 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx - 4$ $f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 20 \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b - 4 = 20 \\ a - b - 4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 24 \\ a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 24 \\ 2a - 2b = -6 \end{cases}$ $f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 4 = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 24 \\ 6a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 2b = 24 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = 3 \end{cases}$ $f(x) = 3x^2 + 6x - 4$</p> <p>b. $\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ 9a - 3b + c = -43 \\ 16a + 4b + c = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ 9a - 3b + c = -43 \\ 16a + 4b + c = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ 5a - 5b = -35 \\ 12a + 2b = -42 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ 5a - 5b = -35 \\ 12a + 2b = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ 5a - 5b = -35 \\ 30a + 5b = -105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ 5a - 5b = -35 \\ 35a = -140 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ 5a - 5b = -35 \\ a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b - c = 8 \\ b = 3 \\ a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 3 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -4x^2 + 3x + 2$</p>

8. Ein Auto fährt auf einer Landstraße. Das Tempo kann in den ersten 24 Sekunden modelliert werden durch die Funktion $f(x) = 0,08x^3 - 3x^2 + 30x$, x in Sekunden, $0 \leq x \leq 24$ und $f(x)$ in km/h.



- Bestimmen Sie (ohne Rechnung), wann das Auto 50km/h fährt!
- Lesen Sie ab, wann die Höchstgeschwindigkeit erreicht wird!
- Berechnen Sie, wann das Auto 85km/h fährt!
- Wann ist die Geschwindigkeit konstant?

- Nach ungefähr 2 Sekunden, 14 Sekunden und ca. 21,2 Sekunden fährt das Auto 50km/h.
- Nach 24 Sekunden erreicht das Auto seine Höchstgeschwindigkeit.
- $f(x) = 85$
 $\Leftrightarrow 0,08x^3 - 3x^2 + 30x = 85$
 $\Leftrightarrow 0,08x^3 - 3x^2 + 30x - 85 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 5 \vee x \approx 9,0693 \vee x \approx 23,4307$ (TR)
Das Auto fährt in der 5., 9. und in der 23. Sekunde 85km/h.
- In der 7. und in der 18. Sekunde wird nicht beschleunigt.