Lösung Kurvendiskussion von Funktionenscharen

Aufgabe	Rechenweg	Ergebnis
1. $h_a(x) = x^2 - 3a^2x$, $a \geq 0$	**Symmetrie:** Die Funktion ist nicht symmetrisch, da sie sowohl ungerade als auch gerade Exponenten enthält. **Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse:** $h_a(0) = 0$ $x^2 - 3a^2x = 0$ $x \cdot (x - 3a^2) = 0$ $x = 0 \vee x = 3a^2$ **Extrema:** $h_a'(x) = 2x - 3a^2$ $h_a''(x) = 2$ $h_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5a^2$ $h_a''(1{,}5a^2) = 2 > 0$, d.h. Minimum $T(1{,}5a^2 / 2{,}25a^4 - 4{,}5a^4) = (1{,}5a^2 / -2{,}25a^4)$ **Wendepunkte:** $h_a''(x) = 2 \neq 0$ => kein Wendepunkt **Monotonie:** $h_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5a^2$ Überprüfung für $x < 1{,}5a^2$: $h_a'(0) = -3a^2 < 0$ d.h. $h_a(x)$ ist monoton fallend für $x < 1{,}5a^2$ (Hier könnte man schon aufhören, da es keine doppelten Nullstellen gibt.) Überprüfung für $x > 1{,}5a^2$:	keine Symmetrie $S_y(0/0)$ Nullstellen: $x = 0 \vee x = 3a^2$ Minimum TP $(1{,}5a^2/-2{,}25a^4)$ Kein Wendepunkt $h_a(x)$ ist monoton fallend für $x < 1{,}5a^2$ $h_a(x)$ ist monoton steigend für $x > 1{,}5a^2$

	$h_a'(2a^2) = 4a^2 - 3a^2 = a^2 > 0$ d.h. $h_a(x)$ ist monoton steigend für $x > 1{,}5a^2$ **Krümmungsverhalten:** $h_a''(x) = 2 > 0$ => linksgekrümmt $\lim\limits_{x\to\infty} h_a(x) = \infty\ und\ \lim\limits_{x\to-\infty} h_a(x) = \infty$, denn es handelt sich um eine Funktion zweiten Grades, die eine positive Zahl vor x^2 hat.	$h_a(x)$ ist immer linksgekrümmt $\lim\limits_{x\to\infty} h_a(x) = \infty\ und\ \lim\limits_{x\to-\infty} h_a(x) = \infty$
2. $f_a(x) = ax^3 - x,\ a > 0$	**Symmetrie:** Die Funktion ist punktsymmetrisch, da sie nur ungerade Exponenten enthält. **Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse:** $f_a(0) = 0$ $ax^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (ax^2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 = 1$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{a}$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{\sqrt{a}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\sqrt{a}$ existiert, da a > 0 **Extrema:** $f_a'(x) = a \cdot 3 \cdot x^2 - 1 = 3a \cdot x^2 - 1$ $f_a''(x) = 6ax$ $f_a'(x) = 0$ $\Leftrightarrow 3ax^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3a}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3a}}$ $f_a''(\frac{1}{\sqrt{3a}}) = \frac{24}{\sqrt{3a}} > 0$, d.h. Minimum $T(\frac{1}{\sqrt{3a}} / a(\frac{1}{\sqrt{3a}})^3 - \frac{1}{\sqrt{3a}}) = (\frac{1}{\sqrt{3a}} / -\frac{2}{3\sqrt{3a}})$ $f_a''(-\frac{1}{\sqrt{3a}}) = -\frac{24}{\sqrt{3a}} < 0$, d.h. Maximum $H(-\frac{1}{\sqrt{3a}} / a(-\frac{1}{\sqrt{3a}})^3 + \frac{1}{\sqrt{3a}}) = (-\frac{1}{\sqrt{3a}} / \frac{2}{3\sqrt{3a}})$	punktsymmetrisch $S_y(0/0)$ Nullstellen: $x = 0 \vee$ $x = \frac{1}{\sqrt{a}} \vee$ $x = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ Maximum HP $(-\frac{1}{\sqrt{3a}} / \frac{2}{3\sqrt{3a}})$ Minimum TP $(\frac{1}{\sqrt{3a}} / -\frac{2}{3\sqrt{3a}})$

Wendepunkte:

$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f_a'''(x) = 6a$

$f_a'''(0) = 6a > 0$ => Wendepunkt

Monotonie:

$f_a'(x) = 3a \cdot x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3a}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3a}}$

Überprüfung im Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$:

$f_a'(0) = -1 < 0$

d.h. $f_a(x)$ ist monoton fallend für $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$.

(Hier könnte man schon aufhören, da es keine doppelten Nullstellen gibt.)

Überprüfung für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$:

$f_a'(-\frac{2}{\sqrt{3a}}) = 3a \cdot \frac{4}{3a} - 1 = 3 > 0$

d.h. $f_a(x)$ ist monoton steigend für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$.

Überprüfung für $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$:

$f_a'(\frac{2}{\sqrt{3a}}) = 3 > 0$

d.h. $f_a(x)$ ist monoton steigend für $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$.

Krümmungsverhalten:

$f_a''(x) = 6ax > 0$ für $x > 0$ => linksgekrümmt

$f_a''(x) = 6ax > 0$ für $x < 0$ => rechtsgekrümmt

$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$, denn es handelt sich um eine Funktion dritten Grades, die eine positive Zahl vor x^3 hat.

Wendepunkt W(0/0)

Monoton steigend für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$ und $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$.

Monoton fallend für $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$.

Die Funktion ist für $x > 0$ linksgekrümmt
und
für $x < 0$ rechtsgekrümmt.

$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \infty$

3. $g_a(x) = -\frac{1}{6}x^4 + ax^3$, $a > 0$	**Symmetrie:** Die Funktion ist weder punk- noch achsensymmetrisch, da sie ungerade und gerade Exponenten enthält. **Nullstellen und Schnittpunkt mit der y-Achse:** $g_a(0) = 0$ $-\frac{1}{6}x^4 + ax^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (-\frac{1}{6}x + a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{6}x = a \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6a$ **Extrema:** $g_a'(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3a \cdot x^2$ $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax$ $g_a'(x) = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x^3 + 3a \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (-\frac{2}{3}x + 3a) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \frac{2}{3}x = 3a \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4{,}5a$ $g_a''(0) = 0$, d.h. Untersuchung auf VZW bei $g_a'(x)$: $g_a'(-a) = \frac{2}{3}a^3 + 3a^3 = 3\frac{2}{3}a^3 > 0$ → kein VZW => kein Extrema $g_a'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 3a \cdot a^2 = 2\frac{1}{3}a^3 > 0$ $g_a''(4{,}5a) = -9a^2 + 27a^2 = 18a^2 > 0$, d.h. Minimum $TP(4{,}5a \ / -68{,}34a^4 + 91{,}125a^3)$ **Wendepunkte:** $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax$ $g_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x(-2x + 6a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3a$ $g_a'''(x) = -4x + 6a$ $g_a'''(0) = 6a > 0$ => Wendepunkt $W_1(0/0)$ $g_a'''(3a) = -6a < 0$ => Wendepunkt $W_2(3a/-13{,}5a^4 + 27a^4)$	keine Symmetrie $S_y(0/0)$ Nullstellen: $x = 0 \vee x = 6a$ Minimum $TP(4{,}5a \ / -68{,}34a^4+91{,}125a^3)$ Wendepunkt $W_1(0/0)$ Wendepunkt $W_2(3a/13{,}5a^4)$

	Monotonie: $g_a'(x) = 3a \cdot x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3a}} \lor x = -\frac{1}{\sqrt{3a}}$ Überprüfung im Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$: $g_a'(0) = -1 < 0$ d.h. $g_a(x)$ ist monoton fallend für $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$. Überprüfung für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$: $g_a'(-\frac{2}{\sqrt{3a}}) = 3a \cdot \frac{4}{3a} - 1 = 3 > 0$ d.h. $g_a(x)$ ist monoton steigend für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$. Überprüfung für $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$: $g_a'(\frac{2}{\sqrt{3a}}) = 3 > 0$ d.h. $g_a(x)$ ist monoton steigend für $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$. **Krümmungsverhalten:** $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax = x(-2x + 6a) > 0$ $\Leftrightarrow$ x > 0 und x < 3a v x < 0 und x > 3a $\Leftrightarrow$ $x \epsilon [0;3a]$ v geht nicht => linksgekrümmt für $x \epsilon [0;3a]$ $g_a''(x) = -2x^2 + 6ax = x(-2x + 6a) < 0$ $\Leftrightarrow$ x > 0 und x > 3a v x < 0 und x < 3a $\Leftrightarrow$ x > 3a v x < 0 => rechtsgekrümmt für x > 3a und x < 0 $\lim_{x\to\infty} g_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$, denn es handelt sich um eine Funktion vierten Grades, die eine negative Zahl vor x^4 hat.	$g_a(x)$ ist monoton fallend für $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3a}}; \frac{1}{\sqrt{3a}}]$. $g_a(x)$ ist monoton steigend für $x < -\frac{1}{\sqrt{3a}}$. $g_a(x)$ ist monoton steigend für $x > \frac{1}{\sqrt{3a}}$. $g_a(x)$ ist linksgekrümmt für $x \epsilon [0;3a]$ $g_a(x)$ ist rechtsgekrümmt für x > 3a und x < 0 $\lim_{x\to\infty} g_a(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to-\infty} g_a(x) = -\infty$